9197

क्रमांक

विषय कोड: **4** | पुस्तिका कोड: **B** | माध्यम: **H**

2019 (I)
गणित विज्ञान
प्रश्न पत्र

समय : *3:00*

पूर्णांक : *200* अंक

'अनुदेश'

1. आपने हिन्दी को माध्यम चुना है। इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बीस (20 भाग 'A' में + 40 भाग 'B' में + 60 भाग 'C' में) बहुल विकल्प प्रश्न (MCQ) दिए गए हैं। आपको भाग 'A' में से अधिकतम 15 और भाग 'B' में से 25 तथा भाग 'C' में से 20 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। यदि निर्धारित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तब भाग 'A' से केवल पहले 15, भाग 'B' से केवल पहले 25 तथा भाग 'C' से केवल पहले 20 उत्तरों की जांच की जाएगी।
2. ओ.एम.आर उत्तर पत्रक अलग से दिया गया है। अपना रोल नम्बर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही हैं तथा कहीं से कटे-फटे नहीं हैं। यदि ऐसा है तो आप इन्विजीलेटर से उसी कोड की पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं। इसी तरह से ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक को भी जांच लें। इस पुस्तिका में रफ़ कार्य करने के लिए अतिरिक्त पृष्ठ संलग्न हैं।
3. ओ.एम.आर उत्तर पत्रक के पृष्ठ 1 में दिए गए स्थान पर अपना रोल नम्बर, नाम तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रमांक लिखिए, साथ ही अपना हस्ताक्षर भी अवश्य करें।
4. **आप अपनी ओ.एम.आर उत्तर पत्रक में रोल नम्बर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित समुचित वृत्तों को काले बॉल पेन से अवश्य काला करें। यह मात्र परीक्षार्थी की ही जिम्मेदारी है कि वह ओ.एम.आर उत्तर पत्रक में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विवरणों का सही तरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अंततः आपको हानि, जिसमें आपकी ओ.एम.आर उत्तर पत्रक की अस्वीकृति भी शामिल है, हो सकती है।**
5. भाग 'A' में प्रत्येक प्रश्न 2 अंक, भाग 'B' में प्रत्येक प्रश्न 3 अंक और भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न 4.75 अंक का है। भाग 'A' में 0.50 अंक तथा 'B' में 0.75 अंक प्रत्येक गलत उत्तर पर ऋणात्मक मूल्यांकन तथा भाग 'C' के उत्तरों का ऋणात्मक मूल्यांकन नहीं है।
6. भाग 'A' तथा भाग 'B' के प्रत्येक प्रश्न के नीचे चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से केवल एक विकल्प ही 'सही' अथवा 'सर्वोत्तम हल' है। आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम हल ढूंढना है। भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न का 'एक' या एक से अधिक विकल्प सही हो सकते हैं। भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही चयन करने पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा।
7. नकल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले परीक्षार्थियों को इस और अन्य भावी परीक्षाओं के लिए अयोग्य ठहराया जा सकता है।
8. परीक्षार्थी को उत्तर पत्रक या रफ़ पृष्ठों के अतिरिक्त कहीं और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए।
9. केलकुलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है।
10. परीक्षा समाप्ति पर छिद्र बिन्दु चिन्हित स्थान से ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक को विभाजित करें। इन्विजीलेटर को मूल ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक सौंपने के पश्चात् आप इसकी कॉर्बनलेस प्रतिलिपि ले जा सकते हैं।
11. हिन्दी माध्यम/संस्करण के प्रश्न में विसंगति होने/पाये जाने पर अंग्रेजी संस्करण प्रामाणिक होगा।
12. केवल परीक्षा की पूरी अवधि तक बैठने वाले परीक्षार्थियों को ही परीक्षा पुस्तिका की प्रतिलिपि साथ ले जाने की अनुमति दी जाएगी।

रोल नंबर :................................

नाम :................................

परीक्षार्थी द्वारा भरी गई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ।

....

इन्विजीलेटर के हस्ताक्षर

2019 (I)
MATHEMATICAL SCIENCES TEST BOOKLET

Time : 3:00 Hours *Maximum Marks: 200*

INSTRUCTIONS

1. This Test Booklet contains one hundred and twenty (20 Part 'A'+40 Part 'B' +60 Part 'C') Multiple Choice Questions (MCQs). You are required to answer a maximum of 15, 25 and 20 questions from part 'A' 'B' and 'C' respectively. If more than required number of questions are answered, only first 15, 25 and 20 questions in Parts 'A' 'B' and 'C' respectively, will be taken up for evaluation.
2. **OMR** answer sheet has been provided separately. Before you start filling up your particulars, please ensure that the booklet contains requisite number of pages and that these are not torn or mutilated. If it is so, you may request the Invigilator to change the booklet of the same code. Likewise, check the **OMR** answer sheet also. Sheets for rough work have been appended to the test booklet.
3. Write your Roll No., Name and Serial Number of this Test Booklet on the **OMR** Answer sheet in the space provided. Also put your signatures in the space earmarked.
4. **You must darken the appropriate circles with a black ball pen related to Roll Number, Subject Code, Booklet Code and Centre Code on the OMR answer sheet. It is the sole responsibility of the candidate to meticulously follow the instructions given on the OMR Answer Sheet, failing which, the computer shall not be able to decipher the correct details which may ultimately result in loss, including rejection of the OMR answer sheet.**
5. Each question in Part 'A' carries **2** marks, Part 'B' **3** marks and Part 'C' **4.75** marks respectively. There will be negative marking @ 0.5 marks in Part 'A' and @ 0.75 marks in Part 'B' for each wrong answer and no negative marking for Part 'C'.
6. Below each question in Part 'A' and 'B', four alternatives or responses are given. Only one of these alternatives is the "correct" option to the question. You have to find, for each question, the correct or the best answer. In Part 'C' each question may have **'ONE'** or **'MORE'** correct options. Credit in a question shall be given only on identification of **'ALL'** the correct options in Part 'C'.
7. Candidates found copying or resorting to any unfair means are liable to be disqualified from this and future examinations.
8. Candidate should not write anything anywhere except on **OMR** answer sheet or sheets for rough work.
9. Use of calculator is not permitted.
10. **After the test is over, at the perforation point, tear the OMR answer sheet, hand over the original OMR answer sheet to the invigilator and retain the carbonless copy for your record.**
11. Candidates who sit for the entire duration of the exam will only be permitted to carry their Test booklet.

भाग/PART- A

1. निम्न में से कौन-सा चित्र बिना कागज़ से पेन उठाए या बिना फिर से उसी रेखा पर पेन चलाए बन सकता है?

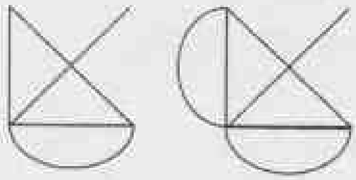


Figure A Figure B

1. चित्र A लेकिन चित्र B नहीं
2. चित्र B लेकिन चित्र A नहीं
3. दोनों चित्र A तथा B
4. न चित्र A और न चित्र B

1. Which of the following figures can be drawn without lifting the pen from the paper or retracing?

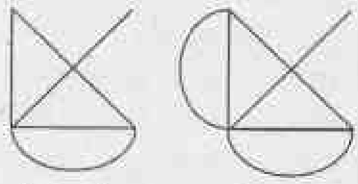
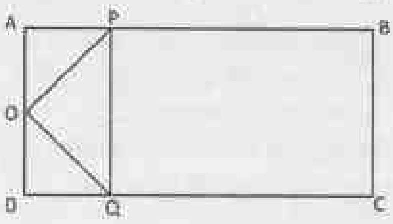


Figure A Figure B

1. figure A but not figure B
2. figure B but not figure A
3. both figures A and B
4. neither figure A nor figure B

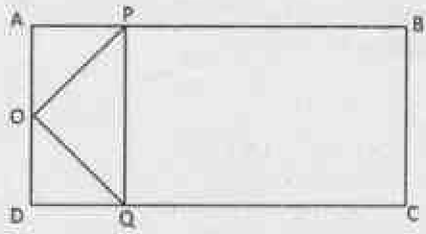
2. ABCD एक आयत है और AD का मध्यबिंदु O है। रेखाओं AB तथा CD पर क्रमश: P तथा Q बिंदु इस तरह से हैं कि $AP = \frac{1}{4}AB$ तथा $DQ = \frac{1}{4}DC$



आयत ABCD के क्षेत्रफल तथा त्रिभुज OPQ के क्षेत्रफल का अनुपात होगा

1. 4	2. 6
3. 8	4. 16

2. ABCD is a rectangle and O is the midpoint of AD. P and Q are points on AB and CD, respectively such that $AP = \frac{1}{4}AB$ and $DQ = \frac{1}{4}DC$.



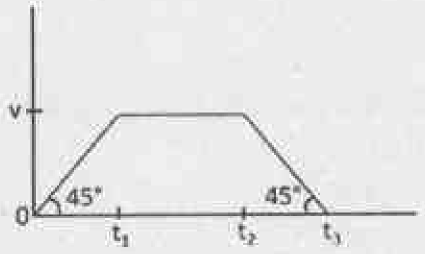
The ratio of area of the rectangle ABCD to that of the triangle OPQ is

1. 4	2. 6
3. 8	4. 16

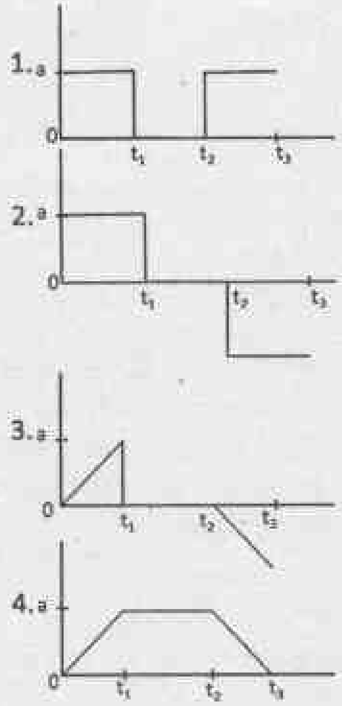
3. गेंदें समान आरंभिक गति से घर्षण रहित, तरंगी सतह वाले ट्रैक पर जल्दी-जल्दी लुढ़काई जा रही हैं। बिंदु A की तुलना में बिंदु B पर गेंदें अधिक घनी इकट्ठी दिखती हैं। निम्न में से कौन-सा कथन सही है?
   1. बिंदु A, बिंदु B से ऊँचा है
   2. बिंदु B, बिंदु A से ऊँचा है
   3. बिंदु A तथा B एक ही ऊँचाई पर हैं
   4. गेंदें पहले बिंदु A पर पहुँची और उसके बाद बिंदु B पर

3. Balls are being rolled out with equal initial speeds along a frictionless, undulating (wave-like) track in quick succession. There is denser clustering of balls around point B than around point A. Which of the following statements is true?
   1. Point A is higher than B
   2. Point B is higher than A
   3. Points A and B are at the same heights.
   4. Balls reached point A first and then point B

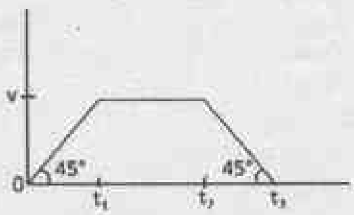
4. किसी पिंड का वेग-समय वक्र नीचे चित्र में है:



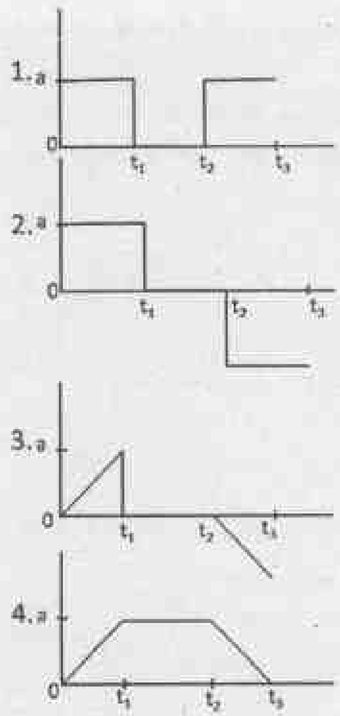
इस पिंड के त्वरण को समय के फलन के रूप में दिखाने के लिए चित्र है



4. Velocity-time curve of a body is given in the diagram below:



The diagram showing the acceleration of this body as a function of time is



5. किसी शहर में हर व्यक्ति के सर पर कम से कम एक बाल है। कम से कम दो लोगों के सरों पर बिलकुल एक जैसी संख्या में बाल होने की गारंटी दी जा सकती है यदि शहर की जनसंख्या

1. सर के बालों की अधिकतम संभव संख्या से अधिक हो
2. सर के बालों की अधिकतम संभव संख्या से कम हो
3. में कम से कम एक जोड़ी सर्वथा समान जुड़वाओं की हो
4. आनुवांशिक रूप से समांग हो

5. In a city, each person has at least one hair on his/her head. At least two persons in this city are guaranteed to have exactly the same number of hair on their heads if the population of the city

1. is greater than the maximum possible number of hair on the head.
2. is less than the maximum possible number of hair on the head.
3. has at least one pair of identical twins.
4. is genetically homogeneous.

6. एक धातु का तार अपनी लंबाई की दिशा में खींचा जाता है। बिलकुल वैसे ही एक और तार को गर्म किया जाता है। दोनों तारों की परिणामी लंबाई बराबर निकलती है। दोनों तारों के व्यासों के बारे में क्या कहा जा सकता है?
   1. दोनों व्यास समान रूप से घटे होंगे
   2. दोनों व्यास समान रूप से बढ़े होंगे
   3. गर्म तार का व्यास खींचे गए तार के व्यास से बड़ा होगा
   4. गर्म तार का व्यास खींचे गए तार के व्यास से कम होगा

6. A metal wire is stretched along its length. Another identical wire is heated. The resultant length of the two wires is the same. What can be said about the diameters of the two wires?
   1. both diameters will have reduced equally
   2. both diameters will have increased equally
   3. the hot wire has a larger diameter than the stretched wire
   4. the hot wire has a smaller diameter than the stretched wire

7. पृष्ठ 1 (प्रथम पृष्ठ) से आरंभ करके किसी पुस्तक के सभी पृष्ठों पर पृष्ठ संख्या लिखने में कुल 2019 अंक लिखने पड़ते हैं। पुस्तक में कितने पृष्ठ हैं?

1. 609	2. 610
3. 709	4. 710

7. The number of digits you have to type to write all the page numbers of a book starting from 1 (first page) is 2019. What is the number of pages in that book?

1. 609	2. 610
3. 709	4. 710

8. एक विद्यार्थी को छः में से पांच पाठ्यक्रमों में 91, 86, 81, 79 तथा 92 अंक प्राप्त हुए। उसके छः पाठ्यक्रमों में प्राप्तांकों का औसत 85 है। छठे पाठ्यक्रम में उसे कितने अंक मिले?

1. 83	2. 85
3. 81	4. 88

8. A student received the following marks in the five of the six courses: 91, 86, 81, 79 and 92. Average of his marks in six subjects is 85. How many marks did he receive in the sixth subject?

1. 83	2. 85
3. 81	4. 88

9. विक्रेता 'A' ने कोई वस्तु मुद्रित मूल्य से Rs. 5 कम में बेची और इसमें उसे विक्रय मूल्य पर 5% का कमीशन मिला। दूसरे विक्रेता 'B' ने वैसी ही वस्तु मुद्रित मूल्य से Rs.15 कम पर बेची एवं उसे विक्रय मूल्य का 15% कमीशन मिला। यदि A तथा B दोनों को कमीशन में समान राशि मिली हो तो वस्तु का मुद्रित मूल्य क्या है?

1. 10	2. 20
3. 22.5	4. 30

9. Salesperson 'A' sells an object at a price Rs. 5 less than the marked price, receiving a commission of 5% on the selling price. The same object is sold by person 'B' at a price Rs.15 less than the marked price, receiving a commission of 15% on the selling price. If both A and B receive the same amount in commission, then what is the marked price of the object?

1. 10	2. 20
3. 22.5	4. 30

10. एक गेंद r घूर्णन प्रति सेकेंड की दर से घूमते हुए साथ-साथ एक स्थिर बिंदु O के इर्द गिर्द R परिक्रमा प्रति सेकेंड की दर से परिक्रमा कर रही है $(R < r)$। घूर्णन तथा परिक्रमा एक ही दिशा में हैं। गेंद पर एक बिंदु ऐसा है जो किसी क्षण पर गेंद के केंद्र तथा O के साथ एक-रैखिक है। यह विन्यास निम्न समयकाल के बाद में फिर दिखेगा

1. $\frac{1}{r-R}$	2. $\frac{1}{R}-\frac{1}{r}$
3. $\frac{1}{r+R}$	4. $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$

10. A ball rotates at a rate r rotations per second and simultaneously revolves around a stationary point O at a rate R revolutions per second ($R < r$). The rotation and revolution are in the same sense. A certain point on the ball is in the line of the centre of the ball and point O at a certain time. This configuration repeats after a time

1. $\frac{1}{r-R}$
2. $\frac{1}{R}-\frac{1}{r}$
3. $\frac{1}{r+R}$
4. $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$

11. एक विषय की दो परीक्षाओं A तथा B में क्रमश: 30 तथा 70 में से अंक दिए जाते हैं। परीक्षा उत्तीर्ण करने के लिए विद्यार्थी को योग में कम से 40 % तथा B में न्यूनतम 40 % अंक पाने हैं। विद्यार्थियों S_i से S_i के निम्न अंक हैं

विद्यार्थी	A	B
S_1	12	28
S_2	10	29
S_3	16	27
S_4	05	29

उत्तीर्ण विद्यार्थी केवल निम्न हैं/है

1. S_1, S_3
2. S_1, S_2, S_4
3. S_1, S_2
4. S_1

11. There are two examinations, A and B in a subject which are evaluated out of 30 and 70 marks, respectively. In order to pass the course the student has to get at least 40 % in total and at least 40 % in B. The following are the marks of the students S_i to S_i.

Students	A	B
S_1	12	28
S_2	10	29
S_3	16	27
S_4	05	29

The only student/s to have passed is/are

1. S_1, S_3
2. S_1, S_2, S_4
3. S_1, S_2
4. S_1

12. दो वन क्षेत्रों में टीक के एक ही आयु के क्रमश: 100 तथा 200 पेड़ हैं। एक ऋतु में सारे पेड़ों की कुछ पत्तियां यादृच्छिक झड़ जाती है। नित्य इन दो क्षेत्रों से संग्रहीत पत्तियों के कूड़े में अपेक्षित है कि

1. लगभग एक जैसे माध्य, मानक विचलन, तथा विचरण गुणांक होंगे
2. भिन्न माध्य, लगभग समान मानक विचलन तथा विचरण गुणांक होंगे
3. भिन्न माध्य, लगभग समान मानक विचलन तथा भिन्न विचरण गुणांक होंगे
4. भिन्न माध्य तथा मानक विचलन परंतु लगभग समान विचरण गुणांक होंगे

12. Two forest patches have, respectively, 100 and 200 teak trees of the same age. In a given season, all trees shed some of their leaves at random. The daily total collections of the leaf litter from the two patches are expected to have

1. nearly equal means, standard deviations and coefficients of variation
2. different means, nearly equal standard deviations and coefficients of variation
3. different means, nearly equal standard deviations and different coefficients of variation
4. different means, and standard deviations but nearly equal coefficients of variation

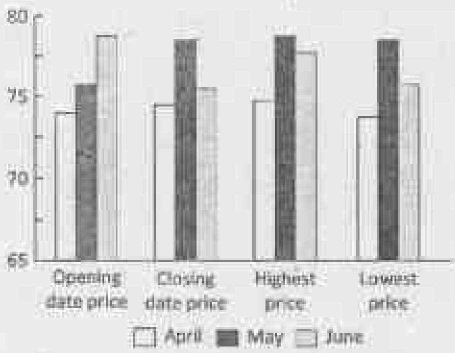
13. निम्न में कौन-सी संख्या अभाज्य है?

1. 183
2. 121
3. 157
4. 10201

13. Which one of the following numbers is a prime number?

1. 183
2. 121
3. 157
4. 10201

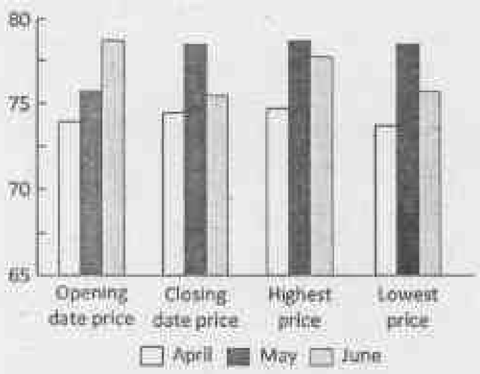
14. ग्राफ (रुपयों में) अप्रैल, मई तथा जून महीनों में पेट्रोल के प्रति लिटर मूल्य दर्शाता है।



इनमें से अशुद्ध कथन बताएं

1. अधिकतम मूल्य कभी 75 से अधिक नहीं हुआ
2. अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य में सर्वाधिक अंतर जून के महीने में था
3. जून महीने में खुलने वाले और बंद होने वाले दिनों के मूल्यों के बीच में सर्वाधिक कमी दिखी
4. सारे प्रदर्शित मूल्य 70 एवं 80 के बीच में हैं

14. The graph depicts the petrol prices (in Rs. per litre) for the months April, May and June.



Pick the INCORRECT statement.

1. The highest price never crossed 75
2. The largest difference between the highest and lowest price was for the month of June
3. Month of June showed the largest decrease of price between the opening date and closing date price
4. All depicted prices lie between 70 and 80

15. शहर में आया यात्री चौराहे पर पहुंचता है। स्थानीय निवासियों A, B तथा C से किसी स्थान का रास्ता पूछने पर उसे निम्न उत्तर मिलते है

A: बांयें मुड़ो

B: बांयें मत मुड़ना

C: सीधे जाओ

यदि A, B तथा C में से केवल एक सच्चा है तो यात्री को

1. बांयें जाना चाहिए
2. सीधे जाना चाहिए
3. दांयें जाना चाहिए
4. बांयें और दांयें मुड़ने के बीच निर्णय नहीं कर पाएगा

15. A traveller to the town reaches a crossroad. Upon asking residents A, B and C for directions to a certain destination, he gets the following responses

A: turn left

B: do not turn left

C: go straight

If only one among A, B and C is truthful, the traveller

1. should go left
2. should go straight
3. should go right
4. will not be able to decide between going left or right

16. एक भौतिक राशि का मान 3.4587 ± 0.0022 मापा गया है। त्रुटियों को भी हिसाब में लेते हुए निम्न में से कौन परिणाम को समुचित रूप से दर्शाता है?

1. 3.4567 2. 3.457
3. 3.46 4. 3.5

16. The value of a physical quantity is measured to be 3.4587 ± 0.0022. Which one of the following is the appropriate representation of the result taking the errors in account?

1. 3.4567 2. 3.457
3. 3.46 4. 3.5

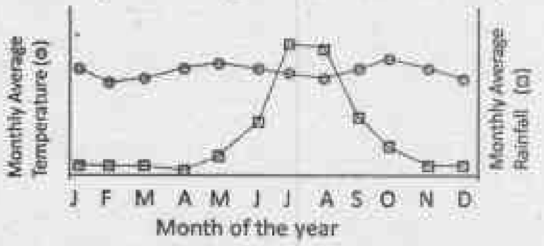
17. दो परस्पर लंबवत अक्षों की दिशाओं में एक ठोस वस्तु के अनुप्रस्थ परिच्छेद क्रमश: वृत्त तथा वर्ग हैं। वह वस्तु है

1. छिन्न शंकु
2. बेलन
3. समांतर असमचतुर्भुज
4. घन

17. The cross-section along two mutually perpendicular axes of a solid object are a circle and a square, respectively. The object is

1. a truncated cone
2. a cylinder
3. a rhomboid
4. a cube

18. नीचे दिया गया ग्राफ़ भारत के किसी स्थान के वर्षा तथा तापमान के मासिक औसत को दिखाता है। यह स्थान कहां पर स्थित होने की सर्वाधिक संभावना है?



1. पश्चिम तट पर
2. पूर्व तट पर
3. उत्तर-पूर्वी पहाड़ियों में
4. हिमालयीय गिरिपादों में

18. The graph below shows the monthly average rainfall and monthly average temperature at a certain place in India. Where is this place most likely to be located?

1. On the west coast
2. On the east coast
3. In the north-eastern hills
4. In the Himalayan foothills

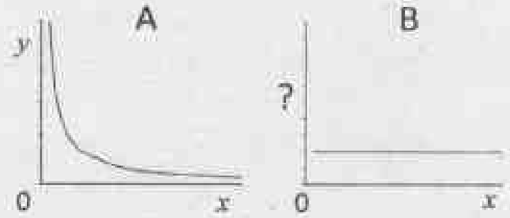
19. एक वृत्त की 8 cm तथा 6 cm की दो समांतर जीवायें एक-दूसरे से 1 cm की दूरी पर हैं। वृत्त की त्रिज्या (cm में) निम्न होगी

1. 4
2. $4\sqrt{2}$
3. 5
4. $5\sqrt{2}$

19. Two parallel chords of length 8 cm and 6 cm of a circle are separated by a distance of 1 cm. The radius of the circle (in cm) is

1. 4
2. $4\sqrt{2}$
3. 5
4. $5\sqrt{2}$

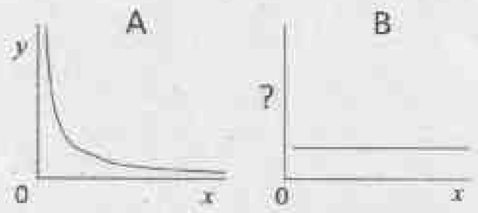
20. A तथा B ग्राफ़, y तथा x के मध्य $x, y > 0$ के लिए एक जैसा संबंध परिभाषित करते हैं



ग्राफ़ B की कोटि पर चर होगा

1. $\frac{1}{x}$
2. x^2
3. $\frac{x}{y}$
4. xy

20. Graphs A and B define the same relationship between y and x for $x, y > 0$.



The variable on the ordinate of graph B is

1. $\frac{1}{x}$
2. x^2
3. $\frac{x}{y}$
4. xy

भाग/PART- B

Unit-1

21. यदि $P_A(x)$ आव्यूह A का अभिलक्षणिक (characteristic) बहुपद हो तो $P_A(x) - P_{A^{-1}}(x)$ निम्न आव्यूहों में से किसके लिए अपरिवर्ती है?

1. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

21. Let $P_A(x)$ denote the characteristic polynomial of a matrix A. Then for which of the following matrices, $P_A(x) - P_{A^{-1}}(x)$ is a constant?

1. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

22. निम्न में से कौन-सा आव्यूह $\mathbb{R}$ पर विकर्णनीय नहीं है?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

22. Which of the following matrices is **not** diagonalizable over $\mathbb{R}$?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

23. इस आव्यूह की कोटि क्या है?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. 2 2. 3
3. 4 4. 5

23. What is the rank of the following matrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. 2 2. 3
3. 4 4. 5

24. बंद अंतराल $[0,1]$ पर वास्तविक मान वाले संतत फलनों की सदिश समष्टि को V मानें लें। $\{\sin(x), \cos(x), \tan(x)\}$ से आच्छादित V का उपसमष्टि को W मानते हुए W की $\mathbb{R}$ पर विमा होगी

1. 1 2. 2
3. 3 4. अनंत

24. Let V denote the vector space of real valued continuous functions on the closed interval $[0,1]$. Let W be the subspace of V spanned by $\{\sin(x), \cos(x), \tan(x)\}$. Then the dimension of W over $\mathbb{R}$ is

1. 1 2. 2
3. 3 4. infinite

25. $\mathbb{R}$ पर V को चर t के अधिकतम 2 घातों (degree) वाले बहुपदों की सदिश समष्टि मानें। आंतर गुणनफल V पर निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

जहां $f, g \in V$. यह मान लें कि $W = span\{1 - t^2, 1 + t^2\}$ तथा V में W का लांबिक पूरक $W^\perp$ है। सभी $h \in W^\perp$ के लिए, निम्न में से कौन सा प्रतिबंध संतुष्ट होता है?

1. h एक सम फलन है, $h(t) = h(-t)$
2. h एक विषम फलन है, $h(t) = -h(-t)$
3. $h(t) = 0$ के लिए वास्तविक हल होगा
4. $h(0) = 0$

25. Let V be the vector space of polynomials in the variable t of degree at most 2 over $\mathbb{R}$. An inner product on V is defined by

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

for $f, g \in V$. Let $W = span\{1 - t^2, 1 + t^2\}$ and $W^{\perp}$ be the orthogonal complement of W in V. Which of the following conditions is satisfied for all $h \in W^{\perp}$?

1. h is an even function, i.e. $h(t) = h(-t)$
2. h is an odd function, i.e. $h(t) = -h(-t)$
3. $h(t) = 0$ has a real solution
4. $h(0) = 0$

26. निम्न समुच्चयों में से कौन-सा अगणनीय है?

1. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \log(x) = \frac{p}{q}\right.$ किसी $p, q \in \mathbb{N}$ के लिए$\left.\right\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid (\cos(x))^n + (\sin(x))^n = 1$ किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए$\}$
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \log\left(\frac{p}{q}\right)\right.$ किसी $p, q \in \mathbb{N}$ के लिए$\left.\right\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = \frac{p}{q}\right.$ किसी $p, q \in \mathbb{N}$ के लिए$\left.\right\}$

26. Which of the following sets is uncountable?

1. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \log(x) = \frac{p}{q} \text{ for some } p, q \in \mathbb{N}\right\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid (\cos(x))^n + (\sin(x))^n = 1 \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}$
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \log\left(\frac{p}{q}\right) \text{ for some } p, q \in \mathbb{N}\right\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = \frac{p}{q} \text{ for some } p, q \in \mathbb{N}\right\}$

27. एक अनुक्रम $\{a_n\}$ पर विचार कीजिए, $a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$. मानें कि

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

तब निम्न में से कौन-सा सत्य है?

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
2. $\limsup_{n\to\infty} b_n > 1/2$
3. $\liminf_{n\to\infty} b_n < -1/2$
4. $0 \le \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n \le 1/2$

27. Consider a sequence $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$. Let

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Then which of the following is true?

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
2. $\limsup_{n\to\infty} b_n > 1/2$
3. $\liminf_{n\to\infty} b_n < -1/2$
4. $0 \le \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n \le 1/2$

28. निम्न में से कौन-सा सत्य है?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ अभिसारी नहीं है
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ अभिसारी है
3. $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2}$ अभिसारी है
4. $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2}$ अपसारी है

28. Which of the following is true?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ does not converge
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converges
3. $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2}$ converges
4. $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2}$ diverges

29. $n \in \mathbb{N}$ के लिए, निम्न में से कौन-सा सत्य है?

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ संभवत: परिमितानेक n के सिवाय सबके लिए
2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ संभवत: परिमितानेक n के सिवाय सबके लिए
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 1$ संभवत: परिमितानेक n के सिवाय सबके लिए
4. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 2$ संभवत: परिमितानेक n के सिवाय सबके लिए

29. For $n \in \mathbb{N}$, which of the following is true?

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ for all, except possibly finitely many n
2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ for all, except possibly finitely many n
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 1$ for all, except possibly finitely many n
4. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 2$ for all, except possibly finitely many n

30. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को संतत तथा एकैकी फलन मानें तब निम्न में से कौन-सा सत्य है?

1. f आच्छादक है

2. f या तो निरंतर ह्रासमान या निरंतर वृद्धिमान है
3. ऐसा $x \in \mathbb{R}$ है जिसके लिए $f(x) = 1$ है
4. f अपरिबद्ध है

30. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous and one-one function. Then which of the following is true?
1. f is onto
2. f is either strictly decreasing or strictly increasing
3. there exists $x \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = 1$
4. f is unbounded

31. यदि $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,\infty)$ तो $n \to \infty$ होने पर निम्न में से कौन-सा सत्य है?
1. $g_n \to 0$ बिंदुवार लेकिन एक समानतः नहीं
2. $g_n \to 0$ एक समानतः
3. $g_n(x) \to x \quad \forall x \in [0,\infty)$
4. $g_n(x) \to \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \in [0,\infty)$

31. Let $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,\infty)$. Which of the following is true as $n \to \infty$?
1. $g_n \to 0$ pointwise but not uniformly
2. $g_n \to 0$ uniformly
3. $g_n(x) \to x \quad \forall x \in [0,\infty)$
4. $g_n(x) \to \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \in [0,\infty)$

32. n के बराबर या उससे कम घात (डिग्री) के x में वास्तविक बहुपदों की सदिश समष्टि $\mathbb{P}_n$ पर विचार करें। यदि $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ को $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt + f'(x)$ से परिभाषित करें तो आधारों $\{1, x, x^2\}$ तथा $\{1, x, x^2, x^3\}$ के लिए T का आव्यूह निरूपण है

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

32. Consider the vector space $\mathbb{P}_n$ of real polynomials in x of degree less than or equal to n. Define $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ by $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt + f'(x)$. Then the matrix representation of T with respect to the bases $\{1, x, x^2\}$ and $\{1, x, x^2, x^3\}$ is

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Unit-2

33. किसी भी पूर्णांक $n \geq 1$ के लिए
$d(n) = n$ के धनात्मक भाजकों की संख्या
$\nu(n) = n$ के भिन्न अभाज्य भाजकों की संख्या
$\omega(n) = n$ के बहुकता के साथ गण्य अभाज्य भाजकों की संख्या
[उदाहरणार्थ: यदि p अभाज्य है, तो
$d(p) = 2, \nu(p) = \nu(p^2) = 1, \ \omega(p^2) = 2$]
1. यदि $n \geq 1000$ तथा $\omega(n) \geq 2$, तब $d(n) > \log n$
2. ऐसा n है कि $d(n) > 3\sqrt{n}$
3. हर n के लिए $2^{\nu(n)} \leq d(n) \leq 2^{\omega(n)}$
4. यदि $\omega(n) = \omega(m)$, तब $d(n) = d(m)$

33. For any integer $n \geq 1$, let
$d(n)$ = number of positive divisors of n
$\nu(n)$ = number of distinct prime divisors of n
$\omega(n)$ = number of prime divisors of n counted with multiplicity
[for example: If p is prime, then
$d(p) = 2, \nu(p) = \nu(p^2) = 1, \ \omega(p^2) = 2$]
1. if $n \geq 1000$ *and* $\omega(n) \geq 2$, then $d(n) > \log n$
2. there exists n such that $d(n) > 3\sqrt{n}$
3. for every n, $2^{\nu(n)} \leq d(n) \leq 2^{\omega(n)}$
4. if $\omega(n) = \omega(m)$, then $d(n) = d(m)$

34. आव्यूहों के निम्न समुच्चय पर विचार कीजिए

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} s & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}, \ s \in \{-1, +1\} \right\}$$

तब निम्न में से कौन-सा सत्य है?
1. G से योग के अंतर्गत समूह बनता है
2. G से गुणन के अंतर्गत आबेली समूह बनता है
3. G का हर अवयव $\mathbb{C}$ पर विकर्णनीय है
4. G गुणन के अंतर्गत परिमिततः जनित समूह है

34. Consider the set of matrices

$$G = \left\{\begin{pmatrix} s & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z},\ s \in \{-1, +1\}\right\}$$

Then which of the following is true?
1. G forms a group under addition
2. G forms an abelian group under multiplication
3. Every element in G is diagonalisable over $\mathbb{C}$
4. G is a finitely generated group under multiplication

35. R को यूनिटी के साथ क्रम विनिमेय वलय मान लें। निम्न में से कौन-सा सत्य है?
1. यदि R की परिमितानेक अभाज्य गुणजावली हों तो R क्षेत्र है
2. यदि R की परिमितानेक गुणजावली हों तो R परिमित है
3. यदि R एक P.I.D. है तब R का हर यूनिटी के साथ उपवलय P.I.D. है
4. यदि R समाकल प्रांत है, जिसकी परिमितानेक गुणजावली है, तब R क्षेत्र है

35. Let R be a commutative ring with unity. Which of the following is true?
1. If R has finitely many prime ideals, then R is a field
2. If R has finitely many ideals, then R is finite
3. If R is a P.I.D., then every subring of R with unity is a P.I.D.
4. If R is an integral domain which has finitely many ideals, then R is a field

36. A को सांस्थितिक समष्टि X का अरिक्त समुच्चय मानें। निम्न में से कौन-सा कथन सत्य है?
1. यदि A संबद्ध है, तब इसका संवरक $\bar{A}$ आवश्यक रूप से संबद्ध नहीं है
2. यदि A पथ-संबद्ध है, तब इसका संवरक $\bar{A}$ पथ संबंद्ध है
3. यदि A संबद्ध है, तब इसका अंतरंग आवश्यक रूप से संबद्ध नहीं है
4. यदि A पथ-संबद्ध है, तब इसका अंतरंग संबद्ध है

36. Let A be a nonempty subset of a topological space X. Which of the following statements is true?
1. If A is connected, then its closure $\bar{A}$ is not necessarily connected
2. If A is path connected, then its closure $\bar{A}$ is path connected
3. If A is connected, then its interior is not necessarily connected
4. If A is path connected, then its interior is connected

37. यदि $i = \sqrt{-1}$ पर केंद्र वाले, त्रिज्या $\frac{1}{2}$ के वामावर्ती रूप में अभिविन्यस्त वृत्त को C माने, तो कंटूर समाकलन $\oint_C \frac{dz}{z^4-1}$ का मान है
1. $-\pi/2$
2. $\pi/2$
3. $-\pi$
4. π

37. Let C be the counter-clockwise oriented circle of radius $\frac{1}{2}$ centred at $i = \sqrt{-1}$. Then the value of the contour integral $\oint_C \frac{dz}{z^4-1}$ is
1. $-\pi/2$
2. $\pi/2$
3. $-\pi$
4. π

38. $f(z) = e^z$ से दिए गए फलन $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ पर सोचें, निम्न में से कौन-सा असत्य है?
1. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\})$ एक विवृत समुच्चय नहीं है
2. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\})$ एक विवृत समुच्चय नहीं है
3. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\})$ एक संवृत समुच्चय है
4. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\})$ एक अपरिबद्ध विवृत समुच्चय है

38. Consider the function $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ given by $f(z) = e^z$. Which of the following is **false**?
1. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\})$ is not an open set.
2. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\})$ is not an open set.
3. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\})$ is a closed set.
4. $f(\{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\})$ is an unbounded open set.

39. किसी वास्तविक संख्या $a > 0$ के लिए, त्रिभुज Δ पर विचार करें, जिसके शीर्ष $0, a, a + ia$ पर हैं। यदि Δ को वामावर्ती दिशा में अभिविन्यस्त कर दें और z का वास्तविक अंश $Re(z)$ से दिखाएं तो कंटूर समाकलन $\oint_\Delta Re(z)\,dz$ का मान है
1. 0
2. $i\frac{a^2}{2}$
3. ia^2
4. $i\frac{3a^2}{2}$

39. Given a real number $a > 0$, consider the triangle Δ with vertices $0, a, a + ia$. If Δ is given the counter clockwise orientation, then the contour integral $\oint_\Delta Re(z)\,dz$ (with $Re(z)$ denoting the real part of z) is equal to
1. 0
2. $i\frac{a^2}{2}$
3. ia^2
4. $i\frac{3a^2}{2}$

40. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ऐसा सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है कि $\lim_{z\to 0} \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \infty$ तब निम्न में से कौन-सा सत्य है?
1. f अपरिवर्ती है
2. f के अपरिमितानेक शून्य संभव हैं
3. अधिक से अधिक, f के परिमितानेक शून्य हो सकते हैं
4. f आवश्यक रूप से नकुत्रापिलोपी (nowhere vanishing) है

40. Let $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be an entire function such that $\lim_{z\to 0} \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \infty$. Then which of the following is true?
1. f is constant
2. f can have infinitely many zeros
3. f can have at most finitely many zeros
4. f is necessarily nowhere vanishing

Unit-3

41. जैकॉबी पुनरावृत्ति पद्धति से निम्न को हल करने पर सोचें

$$x + 2my - 2mz = 1$$
$$nx + y + nz = 2$$
$$2mx + 2my + z = 1$$

जहां $m, n \in \mathbb{Z}$. किसी भी आरंभिक सदिश के लिए, स्कीम अभिसरित होगी यदि m, n निम्न को संतुष्ट करें

1. $m + n = 3$
2. $m > n$
3. $m < n$
4. $m = n$

41. Consider solving the following system by Jacobi iteration scheme

$$x + 2my - 2mz = 1$$
$$nx + y + nz = 2$$
$$2mx + 2my + z = 1$$

where $m, n \in \mathbb{Z}$. With any initial vector, the scheme converges provided m, n, satisfy

1. $m + n = 3$
2. $m > n$
3. $m < n$
4. $m = n$

42. मानें कि $x^*(t)$ वह वक्र है जो निम्न फलनक को न्यूनतमीकृत कर देता है

$$J(x) = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}^2(t)]dt$$

जबकि $x(0) = 0, x(1) = 1$ संतुष्ट होते हों। तब $x^*\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है

1. $\frac{\sqrt{e}}{1+e}$
2. $\frac{2\sqrt{e}}{1+e}$
3. $\frac{\sqrt{e}}{1+2e}$
4. $\frac{2\sqrt{e}}{1+2e}$

42. Let $x^*(t)$ be the curve which minimizes the functional

$$J(x) = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}^2(t)]dt$$

satisfying $x(0) = 0, x(1) = 1$. Then the value of $x^*\left(\frac{1}{2}\right)$ is

1. $\frac{\sqrt{e}}{1+e}$
2. $\frac{2\sqrt{e}}{1+e}$
3. $\frac{\sqrt{e}}{1+2e}$
4. $\frac{2\sqrt{e}}{1+2e}$

43. यदि $y(x) - \int_0^x (x-t)y(t)dt = 1$ का एक हल y हो तो निम्न में से कौन-सा सत्य है?
1. y परिबद्ध है परंतु $\mathbb{R}$ में आवर्ती नहीं है
2. y, $\mathbb{R}$ में आवर्ती है
3. $\int_{\mathbb{R}} y(x)dx < \infty$
4. $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{y(x)} < \infty$

43. If y is a solution of
$y(x) - \int_0^x (x-t)y(t)dt = 1$,
then which of the following is true?
1. y is bounded but not periodic in $\mathbb{R}$
2. y is periodic in $\mathbb{R}$
3. $\int_{\mathbb{R}} y(x)dx < \infty$
4. $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{y(x)} < \infty$

44. मानिए कि एक बिंदु द्रव्यमान m कमानी स्थिरांक k वाली कमानी के एक सिरे से जुड़ा है। कमानी का दूसरा सिरा एक द्रव्यमान-रहित ऐसी ठेली (कार्ट) से बंधा है जो बाहरी युक्ति के द्वारा v_0 गति से एक समतल पर चलाई जा रही है। यदि द्रव्यमान की स्थिर प्रणाली में स्थिति q को व्यापीकृत निर्देशांकों में मान लिया जाए तो इस प्रणाली का लग्रांजी है
1. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q - v_0 t)$
2. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q - v_0 t)^2$
3. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}(q - v_0 t)$
4. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}(q - v_0 t)^2$

44. Suppose a point mass m is attached to one end of a spring of spring constant k. The other end of the spring is fixed on a massless cart that is being moved uniformly on a horizontal plane by an external device with speed v_0. If the position q of the mass in the stationary system is taken as the generalized coordinate, then the Lagrangian of the system is
1. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q - v_0 t)$
2. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q - v_0 t)^2$
3. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}(q - v_0 t)$
4. $\frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}(q - v_0 t)^2$

45. यदि $x^2y''(x) - 2y(x) = 0,\ y(1) = 1,$ $y(2) = 1$ का हल $y(x)$ हो तो $y(3)$ का मान है
1. $\frac{11}{21}$
2. 1
3. $\frac{17}{21}$
4. $\frac{11}{7}$

45. Let $y(x)$ be the solution of
$x^2y''(x) - 2y(x) = 0,\ y(1) = 1,\ y(2) = 1.$
Then the value of $y(3)$ is
1. $\frac{11}{21}$
2. 1
3. $\frac{17}{21}$
4. $\frac{11}{7}$

46. जिस λ के लिए समीकरण $y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0$ का $y(0) = y(\pi)$ तथा $y'(0) = y'(\pi)$ को संतुष्ट करते हुए अतुच्छ हल होगा उस λ का धनात्मक मान है
1. $\lambda = \frac{2n+1}{2},\ n = 1, 2, ...$
2. $\lambda = 2n,\ n = 1, 2, ...$
3. $\lambda = n,\ n = 1, 2, ...$
4. $\lambda = 2n - 1,\ n = 1, 2, ...$

46. The positive values of λ for which the equation $y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0$ has non-trivial solution satisfying $y(0) = y(\pi)$ and $y'(0) = y'(\pi)$ are
1. $\lambda = \frac{2n+1}{2},\ n = 1, 2, ...$
2. $\lambda = 2n,\ n = 1, 2, ...$
3. $\lambda = n,\ n = 1, 2, ...$
4. $\lambda = 2n - 1,\ n = 1, 2, ...$

47. इस PDE पर विचार करें
$$P(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{x^2}e^{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Q(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{2x}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$
जहां P तथा Q दो चरों तथा वास्तविक गुणांक वाले बहुपद हैं। निम्न में से कौन-सा सत्य है?
1. ऐसा $R > 0$ है कि PDE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R\}$ में दीर्घवृत्तीय है
2. ऐसा $R > 0$ है कि PDE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R\}$ में अतिपरवलयिक है
3. ऐसा $R > 0$ है कि PDE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R\}$ में परवलयिक है
4. ऐसा $R > 0$ है कि PDE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$ में अतिपरवलयिक है

47. Consider the PDE

$$P(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{x^2}e^{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} +$$
$$Q(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{2x}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

where P and Q are polynomials in two variables with real coefficients. Then which of the following is true for all choices of P and Q?

1. There exists $R > 0$ such that the PDE is elliptic in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R\}$
2. There exists $R > 0$ such that the PDE is hyperbolic in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R\}$
3. There exists $R > 0$ such that the PDE is parabolic in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R\}$
4. There exists $R > 0$ such that the PDE is hyperbolic in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$

48. समीकरण

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ जहां } (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) & \\ u(x,0) = \sin \pi x, & x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,\infty)\end{array}\right\}$$

का एक मात्र हल u हो तो निम्न में से कौन-सा सत्य है?

1. ऐसा $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$ है कि $u(x,t) = 0$
2. ऐसा$(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$ है कि $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$
3. $e^t u(x,t)$ का फलन $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$ के लिए परिबद्ध है
4. ऐसा $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$ है कि $u(x,t) > 1$

48. Let u be the unique solution of

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ where } (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) & \\ u(x,0) = \sin \pi x, & x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,\infty)\end{array}\right\}$$

Then which of the following is true?

1. There exists $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$ such that $u(x,t) = 0$
2. There exists $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$ such that $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$
3. The function $e^t u(x,t)$ is bounded for $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$
4. There exists $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$ such that $u(x,t) > 1$

Unit-4

49. $X_1, X_2, \cdots$ को माध्य 1 तथा प्रसरण 1 वाले स्वतंत्र प्रसामान्यत: बंटित यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम मानें। मान लें कि N एक प्वासों यादृच्छिक चर है, जिसका माध्य 2 है, जो $X_1, X_2, \cdots$ से स्वतंत्र है। तब $X_1 + X_2 + \cdots + X_{N+1}$ का प्रसरण है

1. 3
2. 4
3. 5
4. 9

49. Let $X_1, X_2, \cdots$ be a sequence of independent normally distributed random variables with mean 1 and variance 1. Let N be a Poisson random variable with mean 2, independent of $X_1, X_2, \cdots$. Then, the variance of $X_1 + X_2 + \cdots + X_{N+1}$ is

1. 3
2. 4
3. 5
4. 9

50. एक यादृच्छिक सदिश (X, Y) के लिए पर्यवेक्षणों के दो समुच्चय हैं। एक सरल रैखिक समाश्रयण मॉडल पर विचार करें जहां Y के X पर समाश्रयण के लिए अंत:खंड हो। n_i पर्यवेक्षणों $(n_1, n_2 > 2)$ वाले i-th समुच्चय $(i = 1,2)$ से समाश्रयण गुणांक का न्यूनतम वर्ग आकलन $\hat{\beta}_i$ मानें। साईज़ $n_1 + n_2$ के संयोजित नमूनों का न्यूतम वर्ग आकलन $\hat{\beta}_0$ मानें। यदि $\hat{\beta}_1 > \hat{\beta}_2 > 0$, हो तो निम्न में क्या सत्य है?

1. $\hat{\beta}_2 < \hat{\beta}_0 < \hat{\beta}_1$
2. $\hat{\beta}_0$ का मान $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1)$, से बाहर हो सकता है, लेकिन $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ से अधिक नहीं हो सकता
3. $\hat{\beta}_0$ का मान $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1)$, के बाहर हो सकता है मगर ऋणात्मक नहीं हो सकता
4. $\hat{\beta}_0$ ऋणात्मक हो सकता है

50. There are two sets of observations on a random vector (X, Y). Consider a simple linear regression model with an intercept for regressing Y on X. Let $\hat{\beta}_i$ be the least squares estimate of the regression coefficient obtained from the i-th $(i = 1,2)$ set consisting of n_i observations $(n_1, n_2 > 2)$. Let $\hat{\beta}_0$ be the least squares estimate obtained from the pooled sample of size $n_1 + n_2$. If it is known that $\hat{\beta}_1 > \hat{\beta}_2 > 0$, which of the following statements is true?

1. $\hat{\beta}_2 < \hat{\beta}_0 < \hat{\beta}_1$
2. $\hat{\beta}_0$ may lie outside $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1)$, but it cannot exceed $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$

3. $\hat{\beta}_0$ may lie outside $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1)$, but it cannot be negative
4. $\hat{\beta}_0$ can be negative

51. मानें कि $r_{1.23}$ तथा $r_{1.234}$ क्रमश: X_2 तथा X_3 पर X_1 तथा X_2, X_3, X_4 पर X_1 के प्रतिदर्श बहु सहसंबंध गुणांक हैं। निम्न में से क्या संभव है?
1. $r_{1.23} = -0.3,\ r_{1.234} = 0.7$
2. $r_{1.23} = 0.7,\ r_{1.234} = 0.3$
3. $r_{1.23} = 0.3, r_{1.234} = 0.7$
4. $r_{1.23} = 0.7, r_{1.234} = -0.3$

51. Suppose $r_{1.23}$ and $r_{1.234}$ are sample multiple correlation coefficients of X_1 on X_2, X_3 and X_1 on X_2, X_3, X_4 respectively. Which of the following is possible?
1. $r_{1.23} = -0.3,\ r_{1.234} = 0.7$
2. $r_{1.23} = 0.7,\ r_{1.234} = 0.3$
3. $r_{1.23} = 0.3, r_{1.234} = 0.7$
4. $r_{1.23} = 0.7, r_{1.234} = -0.3$

52. साईज़ $n = 2$ के नमूने को $N = 4$ साईज़ की समष्टि से बिना नमूना प्रतिस्थापन किए साईज़ के समानुपाती प्रायिकता के उपयोग से निकाला जाता है जहां प्रायिकतायें साईज़ के समानुपात में हैं

i:	1	2	3	4
p_i	0.4	0.2	0.2	0.2

नमूने में यूनिट 1 के सम्मिलित होने की प्रायिकता है
1. 0.4
2. 0.6
3. 0.7
4. 0.75

52. A sample of size $n = 2$ is drawn from a population of size $N = 4$ using probability proportional to size without replacement sampling scheme, where the probabilities proportional to size are

i:	1	2	3	4
p_i	0.4	0.2	0.2	0.2

The probability of inclusion of unit 1 in the sample is
1. 0.4
2. 0.6
3. 0.7
4. 0.75

53. मानें कि $\binom{X}{Y}$ का द्विचरी घनत्व $f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$ है, जहां f_1 तथा f_2 क्रमश: द्विचरी प्रसामान्य बंटन वितरण $N(\mu_1, \Sigma)$ तथा $N(\mu_2, \Sigma)$ है, जबकि $\mu_1 = \binom{1}{1}$, $\mu_2 = \binom{-1}{-1}$ तथा $\Sigma = I_2$, जो 2×2 तत्समक आव्यूह है। तब निम्न में से कौन सा सही है?
1. X तथा Y धनात्मक सहसंबंध वाले हैं
2. X तथा Y ऋणात्मक सहसंबंध वाले हैं
3. X तथा Y असहसंबद्ध है लेकिन स्वतंत्र नहीं है
4. X तथा Y स्वतंत्र हैं

53. Suppose that $\binom{X}{Y}$ has a bivariate density $f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$, where f_1 and f_2 are respectively, the densities of bivariate normal distributions $N(\mu_1, \Sigma)$ and $N(\mu_2, \Sigma)$, with $\mu_1 = \binom{1}{1}$, $\mu_2 = \binom{-1}{-1}$ and $\Sigma = I_2$, the 2×2 identity matrix. Then which of the following is correct?
1. X and Y are positively correlated
2. X and Y are negatively correlated
3. X and Y are uncorrelated but they are not independent
4. X and Y are independent

54. उद्देश्य फलन $z = 5x + 2y$ का रैखिक बंधनों $x \geq 0, y \geq 0, x \geq y$ तथा $2 \leq x + y \leq 4$ के साथ अधिकतम मान है
1. 14
2. 20
3. 25
4. 27

54. The maximum value of the objective function $z = 5x + 2y$ under the linear constraints $x \geq 0, y \geq 0, x \geq y$ and $2 \leq x + y \leq 4$ is
1. 14
2. 20
3. 25
4. 27

55. किसी बहु विकल्पीय उत्तरों वाले परीक्षा में 30 प्रश्न है। हर प्रश्न के उत्तर में 4 विकल्प हैं और अभ्यर्थी को केवल एक को चिन्हित करना है। तीन अभ्यर्थी A, B, C इन 30 प्रश्नों के उत्तरों को स्वतंत्र रूप से यादृच्छिक चिन्हित करते हैं। तीनों विद्यार्थियों के सभी 30 उत्तरों के पूर्णत: एक जैसा होने की प्रायिकता होगी
1. 60^{-4}
2. 30^{-4}
3. 4^{-30}
4. 4^{-60}

55. There are 30 questions in a certain multiple choice examination paper. Each question has 4 options and exactly one is to be marked by the candidate. Three candidates A, B, C mark each of the 30 questions at random independently. The probability that all the 30 answers of the three students match each other perfectly is

1. 60^{-4}
2. 30^{-4}
3. 4^{-30}
4. 4^{-60}

56. यदि X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 संतत बंटन फलन वाले $i.i.d.$ यादृच्छिक चर हों तो $P(X_1 > X_2 > X_3 > X_4 > X_5 | X_1 = max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5))$ का मान है

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{5}$
3. $\frac{1}{4!}$
4. $\frac{1}{5!}$

56. Let X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 be $i.i.d.$ random variables having a continuous distribution function. Then $P(X_1 > X_2 > X_3 > X_4 > X_5 | X_1 = max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5))$ equals

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{5}$
3. $\frac{1}{4!}$
4. $\frac{1}{5!}$

57. अवस्था समष्टि {0, 1, 2, 3, 4} वाली मार्कोव श्रृंखला तथा उसके निम्न संक्रमण आव्यूह के बारे में विचार करें

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

तब $\lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}$ का मान होगा

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{2}$
3. 0
4. 1

57. Consider a Markov Chain with state space {0, 1, 2, 3, 4} and transition matrix

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Then $\lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}$ equals

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{2}$
3. 0
4. 1

58. फलन $f(x)$ को इस तरह परिभाषित करते हैं

$$f(x) = ce^{-x^4}, \ x \in \mathbb{R}.$$

c के किस मान के लिए f प्रायिकता घनत्व फलन होगा?

1. $\frac{2}{\Gamma(1/4)}$
2. $\frac{4}{\Gamma(1/4)}$
3. $\frac{3}{\Gamma(1/3)}$
4. $\frac{1}{4\Gamma(4)}$

58. Consider the function $f(x)$ defined as

$f(x) = ce^{-x^4}, \ x \in \mathbb{R}.$

For what value of c is f a probability density function?

1. $\frac{2}{\Gamma(1/4)}$
2. $\frac{4}{\Gamma(1/4)}$
3. $\frac{3}{\Gamma(1/3)}$
4. $\frac{1}{4\Gamma(4)}$

59. यदि (X, Y) द्विचर प्रसामान्य बंटन के अनुसार हो जहां माध्य μ_1, μ_2, मानक विचलन σ_1, σ_2 तथा सह संबंध गुणांक ρ हों जहां सभी प्राचल अज्ञात हैं। तब परीक्षण $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ निम्न में से किनकी स्वतंत्रता परीक्षित करने के तुल्य है

1. X तथा Y
2. X तथा $X - Y$
3. $X + Y$ तथा Y
4. $X + Y$ तथा $X - Y$

59. Suppose (X, Y) follows bivariate normal distribution with means μ_1, μ_2, standard deviations σ_1, σ_2 and correlation coefficient ρ, where all the parameters are unknown. Then testing $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ is equivalent to testing the independence of

1. X and Y
2. X and $X - Y$
3. $X + Y$ and Y
4. $X + Y$ and $X - Y$

60. साइज़ 7 का एक यादृच्छिक नमूना निम्न p.d.f. के बंटन में से लिया जाता है.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{3\theta(1+\theta^2)}, & -2\theta \le x \le \theta,\ \theta > 0 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

एवं पर्यवेक्षण $12, -54, 26, -2, 24, 17, -39$ है। ऐसे में θ का उच्चतमत प्रायिकता आकलन क्या है?

1. 12
2. 24
3. 26
4. 27

60. A random sample of size 7 is drawn from a distribution with p.d.f.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{3\theta(1+\theta^2)}, & -2\theta \le x \le \theta,\ \theta > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and the observations are $12, -54, 26, -2, 24, 17, -39$. What is the maximum likelihood estimate of θ?

1. 12
2. 24
3. 26
4. 27

भाग/PART- C

Unit 1

61. X को गणनीय समुच्चय मानें। तब निम्न में से कौन से सत्य हैं?

1. X पर ऐसा 'मेट्रिक' d है कि (X, d) पूर्ण है
2. X पर ऐसा 'मेट्रिक' d है कि (X, d) पूर्ण नहीं है
3. X पर ऐसा 'मेट्रिक' d है कि (X, d) संहत है
4. X पर ऐसा 'मेट्रिक' d है कि (X, d) संहत नहीं है

61. Let X be a countable set. Then which of the following are true?

1. There exists a metric d on X such that (X, d) is complete
2. There exists a metric d on X such that (X, d) is not complete
3. There exists a metric d on X such that (X, d) is compact
4. There exists a metric d on X such that (X, d) is not compact

62. मानें कि $\mathbb{R}^n$ से $\mathbb{R}^n$ में $\mathbb{R}$-रैखिक प्रतिचित्रों की $L(\mathbb{R}^n)$ समष्टि है। तो यदि $Ker(T)$ वहां T की अष्टि (शून्य समष्टि) इंगित करें तो निम्न में से कौन से सत्य हैं?

1. ऐसा कोई $T \in L(\mathbb{R}^5)\backslash\{0\}$ है कि रेंज $(T) = Ker(T)$
2. ऐसा कोई $T \in L(\mathbb{R}^5)\backslash\{0\}$ नहीं है कि रेंज $(T) = Ker(T)$
3. ऐसा कोई $T \in L(\mathbb{R}^6)\backslash\{0\}$ है कि रेंज $(T) = Ker(T)$
4. ऐसा कोई $T \in L(\mathbb{R}^6)\backslash\{0\}$ नहीं है, कि रेंज $(T) = Ker(T)$

62. Let $L(\mathbb{R}^n)$ be the space of $\mathbb{R}$-linear maps from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$. If $Ker(T)$ denotes the kernel (null space) of T then which of the following are true?

1. There exists $T \in L(\mathbb{R}^5)\backslash\{0\}$ such that Range $(T) = Ker(T)$
2. There does not exist $T \in L(\mathbb{R}^5)\backslash\{0\}$ such that Range $(T) = Ker(T)$
3. There exists $T \in L(\mathbb{R}^6)\backslash\{0\}$ such that Range $(T) = Ker(T)$
4. There does not exist $T \in L(\mathbb{R}^6)\backslash\{0\}$ such that Range $(T) = Ker(T)$

63. मानें कि $\mathbb{R}$ पर परिमित विमीय सदिश समष्टि V है तथा $T: V \to V$ रैखिक प्रतिचित्र है। तब कुछ रैखिक प्रतिचित्रों $T_1: V \to W, T_2: W \to V$ के लिए $T = T_2 \circ T_1$ इस तरह लिखा जा सकता है कि W परिमित विमीय सदिश समष्टि हो तथा

1. T_1 तथा T_2 दोनों आच्छादक हैं
2. T_1 तथा T_2 दोनों एकैकी हैं
3. T_1 आच्छादक हैं, T_2 एकैकी है
4. T_1 एकैकी, T_2 आच्छादक है

63. Let V be a finite dimensional vector space over $\mathbb{R}$ and $T: V \to V$ be a linear map. Can you always write $T = T_2 \circ T_1$ for some linear maps $T_1: V \to W$, $T_2: W \to V$, where W is some finite dimensional vector space and such that

1. both T_1 and T_2 are onto
2. both T_1 and T_2 are one to one
3. T_1 is onto, T_2 is one to one
4. T_1 is one to one, T_2 is onto

64. $A = ((a_{ij}))$ को 3×3 सम्मिश्र आव्यूह मानें। सही कथनों को पहचानिए
1. $\det(((-1)^{i+j}a_{ij})) = \det A$
2. $\det(((-1)^{i+j}a_{ij})) = -\det A$
3. $\det(((\sqrt{-1})^{i+j}a_{ij})) = \det A$
4. $\det(((\sqrt{-1})^{i+j}a_{ij})) = -\det A$

64. Let $A = ((a_{ij}))$ be a 3×3 complex matrix. Identify the correct statements
1. $\det(((-1)^{i+j}a_{ij})) = \det A$
2. $\det(((-1)^{i+j}a_{ij})) = -\det A$
3. $\det(((\sqrt{-1})^{i+j}a_{ij})) = \det A$
4. $\det(((\sqrt{-1})^{i+j}a_{ij})) = -\det A$

65. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ को $n \geq 1$ घात (डिग्री) का अचरेतर बहुपद मानें। बहुपद $q(x) = \int_0^x p(t)dt$, $r(x) = \frac{d}{dx}p(x)$ पर विचार करें। यदि V को x के सभी बहुपदों की वास्तविक सदिश समष्टि मान लें तो निम्न में से कौन से सत्य हैं?
1. q तथा r V में रैखिकत: स्वतंत्र है
2. q तथा r V में रैखिकत: स्वतंत्र नहीं है
3. q तथा r की रैखिक विस्तृति में x^n है
4. q तथा r की रैखिक विस्तृति में x^{n+1} है

65. Let $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ be a non-constant polynomial of degree $n \geq 1$. Consider the polynomial $q(x) = \int_0^x p(t)dt$, $r(x) = \frac{d}{dx}p(x)$. Let V denote the real vector space of all polynomials in x. Then which of the following are true?
1. q and r are linearly independent in V
2. q and r are linearly dependent in V
3. x^n belongs to the linear span of q and r
4. x^{n+1} belongs to the linear span of q and r

66. $M_n(\mathbb{R})$ को $\mathbb{R}$ पर $n \times n$ आव्यूहों का वलय मान लें। निम्न में से कौन से हर $n \geq 2$ के लिए सत्य है?
1. ऐसे आव्यूह $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ इस तरह से हैं कि $AB - BA = I_n$, जहां I_n $n \times n$ तत्समक आव्यूह है
2. यदि $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ तथा $AB = BA$ हो तो $\mathbb{R}$ पर A तभी विकर्णनीय होगा यदि और केवल यदि B भी $\mathbb{R}$ पर विकर्णनीय हो
3. यदि $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, तो AB तथा BA के अल्पिष्ट बहुपद एक-जैसे होंगें
4. यदि $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, तो AB तथा BA के $\mathbb{R}$ में अभिलक्षणिक मान (eigenvalues) एक जैसे होंगें

66. Let $M_n(\mathbb{R})$ be the ring of $n \times n$ matrices over $\mathbb{R}$. Which of the following are true for every $n \geq 2$?
1. there exist matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ such that $AB - BA = I_n$, where I_n denotes the identity $n \times n$ matrix.
2. if $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ and $AB = BA$, then A is diagonalisable over $\mathbb{R}$ if and only if B is diagonalizable over $\mathbb{R}$
3. if $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, then AB and BA have same minimal polynomial
4. if $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, then AB and BA have the same eigenvalues in $\mathbb{R}$

67. एक आव्यूह $A = (a_{ij})_{5\times5}$, $1 \leq i, j \leq 5$ पर विचार करें, इस तरह से कि $a_{ij} = \frac{1}{n_i+n_j+1}$, जहां $n_i, n_j \in \mathbb{N}$. तब निम्न में से किन में A एक धनात्मक निश्चित आव्यूह होगा?
1. $n_i = i$ सभी $i = 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए
2. $n_1 < n_2 < \cdots < n_5$
3. $n_1 = n_2 = \cdots = n_5$
4. $n_1 > n_2 > \cdots > n_5$

67. Consider a matrix $A = (a_{ij})_{5\times5}$, $1 \leq i, j \leq 5$ such that $a_{ij} = \frac{1}{n_i+n_j+1}$, where $n_i, n_j \in \mathbb{N}$. Then in which of the following cases A is a positive definite matrix?
1. $n_i = i$ for all $i = 1, 2, 3, 4, 5$
2. $n_1 < n_2 < \cdots < n_5$
3. $n_1 = n_2 = \cdots = n_5$
4. $n_1 > n_2 > \cdots > n_5$

68. $\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ को $\mathbb{R}^n$ पर मानक आंतर गुणनफल मान लें। शून्येतर $w \in \mathbb{R}^n$ के लिए, $T_w: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ को निम्न रूप से परिभाषित करें $T_w(v) = v - \frac{2\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, $v \in \mathbb{R}^n$ के लिए। तब निम्न में से कौन-से सत्य हैं?
1. $\det(T_w) = 1$
2. $\langle T_w(v_1), T_w(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

3. $T_w = T_w^{-1}$
4. $T_{2w} = 2T_w$

68. Let $\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denote the standard inner product on $\mathbb{R}^n$. For a non zero $w \in \mathbb{R}^n$, define $T_w: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ by $T_w(v) = v - \frac{2\langle v,w \rangle}{\langle w,w \rangle} w$, for $v \in \mathbb{R}^n$. Which of the following are true?

1. $\det(T_w) = 1$
2. $\langle T_w(v_1), T_w(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$
3. $T_w = T_w^{-1}$
4. $T_{2w} = 2T_w$

69. परिमेय क्षेत्र $\mathbb{Q}$ पर आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ के बारे में विचार करें। निम्न में से कौन-से आव्यूह हैं जो $\mathbb{Q}$ पर उपयुक्त 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूह P के लिए $P^t AP$ स्वरूप के हैं? यहां P^t से आशय P के परिवर्त से है।

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

69. Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ over the field $\mathbb{Q}$ of rationals. Which of the following matrices are of the form $P^t AP$ for a suitable 2×2 invertible matrix P over $\mathbb{Q}$? Here P^t denotes the transpose of P.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

70. मानें कि $\{a_n\}_{n\geq 0}$ धनात्मक वास्तविक सख्याओं का अनुक्रम है। तब यदि $K = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ हो तो निम्न में से कौन-से सत्य हैं?

1. यदि $K = \infty$, तब $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ हर एक $r > 0$ के लिए अभिसारी है
2. यदि $K = \infty$, तब $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ किसी भी $r > 0$ के लिए अभिसारी नहीं है
3. यदि $K = 0$, तब $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ हर एक $r > 0$ के लिए अभिसारी है
4. यदि $K = 0$, तब $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ किसी भी $r > 0$ के लिए अभिसारी नहीं है

70. Let $\{a_n\}_{n\geq 0}$ be a sequence of positive real numbers. Then, for $K = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, which of the following are true?

1. if $K = \infty$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ is convergent for every $r > 0$
2. if $K = \infty$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ is not convergent for any $r > 0$
3. if $K = 0$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ is convergent for every $r > 0$
4. if $K = 0$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ is not convergent for any $r > 0$

71. मानें कि $\alpha \in \mathbb{R}$ के लिए, $\lfloor \alpha \rfloor$ सबसे बड़ा ऐसा पूर्णांक है, जो α से छोटा है या उसके बराबर है। $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ को $d(x,y) = \lfloor |x-y| \rfloor, x, y \in \mathbb{R}$ से परिभाषित करें। तब निम्न में से कौन-से सत्य हैं?

1. $d(x,y) = 0$ यदि और केवल यदि $x = y,\ x, y \in \mathbb{R}$.
2. $d(x,y) = d(y,x), x, y \in \mathbb{R}$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ x, y, z \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}$ पर d मेट्रिक नहीं है

71. For $\alpha \in \mathbb{R}$, let $\lfloor \alpha \rfloor$ denote the greatest integer smaller than or equal to α. Define $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ by $d(x,y) = \lfloor |x-y| \rfloor,\ x, y \in \mathbb{R}$. Then which of the following are true?

1. $d(x,y) = 0$ if and only if $x = y,\ x, y \in \mathbb{R}$.
2. $d(x,y) = d(y,x), x, y \in \mathbb{R}$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ x, y, z \in \mathbb{R}$.
4. d is not a metric on $\mathbb{R}$.

72. फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ पर विचार करें, तब निम्न में से कौन-से सत्य हैं?

1. यदि f का वक्र X-अक्ष के समांतर किसी रेखा को कम से कम दो बिंदुओं पर काटता है तो f एकैकी नहीं होगा
2. यदि f का वक्र X-अक्ष के समांतर किसी भी रेखा को अधिकतम एक बिंदु पर काटे तो f एकैकी है
3. यदि f का वक्र X-अक्ष के समांतर हर रेखा को काटे तो f आच्छादी है
4. यदि f का वक्र X-अक्ष के समांतर कम से कम एक रेखा को न काटे तो f आच्छादी नहीं है

72. Consider a function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Then which of the following are true?

1. f is not one-one if the graph of f intersects some line parallel to X-axis in at least two points
2. f is one-one if the graph of f intersects any line parallel to the X-axis in at most one point
3. f is surjective if the graph of f intersects every line parallel to X-axis
4. f is not surjective if the graph of f does not intersect at least one line parallel to X-axis

73. यदि $f(x) = \int_1^\infty \frac{\cos t}{x^2+t^2} dt$ हो तो निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. $\mathbb{R}$ पर f परिबद्ध है
2. $\mathbb{R}$ पर f संतत है
3. $\mathbb{R}$ पर f सर्वत्र परिभाषित नहीं है
4. $\mathbb{R}$ पर f संतत नहीं है

73. Let $f(x) = \int_1^\infty \frac{\cos t}{x^2+t^2} dt$. Then which of the following are true?

1. f is bounded on $\mathbb{R}$
2. f is continuous on $\mathbb{R}$
3. f is not defined everywhere on $\mathbb{R}$
4. f is not continuous on $\mathbb{R}$

74. $\{x_n\}$ धनात्मक वास्तविकों का अनुक्रम है। यदि $y_n = \frac{x_n}{1+x_n}$ हो तो निम्न में से कौन-से सत्य हैं?

1. यदि $\{y_n\}$ अभिसारी है, तो $\{x_n\}$ भी अभिसारी है
2. यदि $\{x_n\}$ अभिसारी है, तो $\{y_n\}$ भी अभिसारी है
3. यदि $\{x_n\}$ परिबद्ध है, तो $\{y_n\}$ भी परिबद्ध है
4. यदि $\{y_n\}$ परिबद्ध है, तो $\{x_n\}$ भी परिबद्ध है

74. Suppose that $\{x_n\}$ is a sequence of positive reals. Let $y_n = \frac{x_n}{1+x_n}$. Then which of the following are true?

1. $\{x_n\}$ is convergent if $\{y_n\}$ is convergent.
2. $\{y_n\}$ is convergent if $\{x_n\}$ is convergent.
3. $\{y_n\}$ is bounded if $\{x_n\}$ is bounded.
4. $\{x_n\}$ is bounded if $\{y_n\}$ is bounded.

75. मानें कि

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \in (0,1] \text{ के लिए} \\ 0, & x = 0 \text{ के लिए} \end{cases}$$

तथा $g(x) = xf(x)$ for $0 \le x \le 1$ है, तो निम्न में से कौन-से सही है?

1. f परिबद्ध विचरण वाला है
2. f परिबद्ध विचरण वाला नहीं है
3. g परिबद्ध विचरण वाला है
4. g परिबद्ध विचरण वाला नहीं है

75. Let $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & for\ x \in (0,1] \\ 0, & for\ x = 0 \end{cases}$

and $g(x) = xf(x)$ for $0 \le x \le 1$. Then which of the following are true?

1. f is of bounded variation
2. f is not of bounded variation
3. g is of bounded variation
4. g is not of bounded variation

76. $a < c < b$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ को संतत मानें। यदि f को $(a,b) \setminus \{c\}$ के हर बिंदु पर अवकलनीय मानें और f' की सीमा c पर हो तो निम्न में से कौन से सत्य हैं?

1. c पर f अवकलनीय है
2. c पर f का अवकलनीय होना आवश्यक नहीं है
3. c पर f अवकलनीय है तथा $\lim_{x\to c} f'(x) = f'(c)$
4. c पर f अवकलनीय है लेकिन $f'(c)$ आवश्यक रूप से $\lim_{x\to c} f'(x)$ नहीं है

76. Let $a < c < b$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ be continuous. Assume that f is differentiable at every point of $(a,b) \setminus \{c\}$ and f' has a limit at c. Then which of the following are true?

1. f is differentiable at c
2. f need not be differentiable at c
3. f is differentiable at c and $\lim_{x\to c} f'(x) = f'(c)$
4. f is differentiable at c but $f'(c)$ is not necessarily $\lim_{x\to c} f'(x)$

77. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को अह्रासमान फलन मानें। निम्न में से कौन-सा F के असांतत्यों का समुच्चय हो सकता है

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{N}$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

77. Let $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a non-decreasing function. Which of the following can be the set of discontinuities of F
1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{N}$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

78. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ को
$f(x_1, x_2, x_3) =$
$(e^{x_2}\cos x_1,\ e^{x_2}\sin x_1,\ 2x_1 - \cos x_3)$
से दिया जाता है। निम्न पर विचार करें। $E =$ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$: (x_1, x_2, x_3) के सापेक्ष ऐसा उपसमुच्चय U इस तरह है कि $f|_U$ विवृत प्रतिचित्र है}, तब निम्न में से कौन से सत्य हैं?
1. $E = \mathbb{R}^3$
2. E गणनीय है
3. E गणनीय नहीं है लेकिन $\mathbb{R}^3$ नहीं है
4. $\left\{\left(x_1, x_2, \frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ E का उचित उपसमुच्चय है

78. Let $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be given by
$f(x_1, x_2, x_3) =$
$(e^{x_2}\cos x_1,\ e^{x_2}\sin x_1, 2x_1 - \cos x_3)$
Consider $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$: there exists an open subset U around (x_1, x_2, x_3) such that $f|_U$ is an open map}. Then which of the following are true?
1. $E = \mathbb{R}^3$
2. E is countable
3. E is not countable but not $\mathbb{R}^3$
4. $\left\{\left(x_1, x_2, \frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ is a proper subset of E

Unit 2

79. किसी भी अभाज्य p के लिए समूह $G =$ $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ पर विचार करें। तब निम्न में से कौन-से सत्य हैं?
1. G में p कोटि का एक अवयव है
2. G में p कोटि का ठीक-ठीक एक अवयव है
3. G में कोई p-सिलो (Sylow) उपसमूह नहीं है
4. p कोटि का हर अवयव आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ का संयुग्मी है, जहां a $\in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$

79. For any prime p, consider the group
$G = GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
Then which of the following are true?
1. G has an element of order p
2. G has exactly one element of order p
3. G has no p-Sylow subgroups
4. Every element of order p is conjugate to a matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, where a $\in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$

80. $\mathbb{Z}[X]$ को पूर्णांकों पर बहुपदों का वलय मानें। तब योज्य समूह $\mathbb{Z}[X]$ होगा
1. धनात्मक परिमेय संख्याओं के गुणात्मक समूह $\mathbb{Q}^+$ के तुल्याकारी
2. योग में परिमेय संख्याओं के समूह $\mathbb{Q}$ के तुल्याकारी
3. गणनीय
4. अगणनीय

80. Let $\mathbb{Z}[X]$ be the ring of polynomials over integers. Then the additive group $\mathbb{Z}[X]$ is
1. isomorphic to the multiplicative group $\mathbb{Q}^+$of positive rational numbers.
2. isomorphic to the group of rational numbers $\mathbb{Q}$ under addition
3. countable
4. uncountable

81. $X = (0, 1)$ को विवृत्त इकाई अंतराल मानें तथा $C(X, \mathbb{R})$ को X से $\mathbb{R}$ तक संतत फलनों का वलय मानें। किसी भी $x \in (0, 1)$ के लिए मानें कि $I(x) = \{f \in C(X, \mathbb{R}) | f(x) = 0\}$, तब निम्न में से कौन से सत्य हैं?
1. $I(x)$ अभाज्य गुणजावली (ideal) है
2. $I(x)$ उच्चिष्ठ गुणजावली (ideal) है
3. $C(X, \mathbb{R})$ की हर उच्चिष्ठ गुणजावली (ideal) कुछ $x \in X$ के लिए $I(x)$ के बराबर है
4. $C(X, \mathbb{R})$ पूर्णांकीय प्रांत है

81. Let $X = (0, 1)$ be the open unit interval and $C(X, \mathbb{R})$ be the ring of continuous functions from X to $\mathbb{R}$. For any $x \in (0, 1)$, let $I(x) =$ $\{f \in C(X, \mathbb{R}) | f(x) = 0\}$. Then which of the following are true?
1. $I(x)$ is a prime ideal
2. $I(x)$ is a maximal ideal
3. Every maximal ideal of $C(X, \mathbb{R})$ is equal to $I(x)$ for some $x \in X$
4. $C(X, \mathbb{R})$ is an integral domain

82. यदि $n \in \mathbb{Z}$ हो तो निम्न में से कौन-से सत्य है?
1. $X^3 + nX + 1$ हर n के लिए $\mathbb{Z}$ पर अखंडनीय है
2. $X^3 + nX + 1$, $\mathbb{Z}$ पर खंडनीय है, यदि $n \in \{0, -2\}$
3. $X^3 + nX + 1$, $\mathbb{Z}$ पर अखंडनीय है, यदि $n \notin \{0, -2\}$
4. $X^3 + nX + 1$, $\mathbb{Z}$ पर अनंत: बहु n के लिए खंडनीय है

82. Let $n \in \mathbb{Z}$. Then which of the following are correct?
1. $X^3 + nX + 1$ is irreducible over $\mathbb{Z}$ for every n
2. $X^3 + nX + 1$ is reducible over $\mathbb{Z}$ if $n \in \{0, -2\}$
3. $X^3 + nX + 1$ is irreducible over $\mathbb{Z}$ if $n \notin \{0, -2\}$
4. $X^3 + nX + 1$ is reducible over $\mathbb{Z}$ for infinitely many n.

83. $\mathbb{F}_{27}$ को साईज़ 27 का परिमित क्षेत्र मानें। हर $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ के लिए $A_\alpha = \{1, 1+\alpha, 1+\alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3, \cdots\}$ परिभाषित किया जाता है। तब निम्न में से कौन-से सत्य हैं?
1. $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ की संख्या इस तरह कि $|A_\alpha| = 26$, 12 के बराबर है
2. $0 \in A_\alpha$ यदि और केवल यदि $\alpha \neq 0$
3. $|A_1| = 27$
4. $\cap_{\alpha \in \mathbb{F}_{27}} A_\alpha$ एक एकल समुच्चय है

83. Let $\mathbb{F}_{27}$ denote the finite field of size 27. For each $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$, we define
$A_\alpha = \{1, 1+\alpha, 1+\alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3, \cdots\}$.
Then which of the following are true?
1. the number of $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ such that $|A_\alpha| = 26$ equals 12
2. $0 \in A_\alpha$ if and only if $\alpha \neq 0$
3. $|A_1| = 27$
4. $\cap_{\alpha \in \mathbb{F}_{27}} A_\alpha$ is a singleton set

84. विवृत अंतराल (0, 1) के निम्न विवृत आवरकों में से कौन से परिमित उपावरण को लेते हैं?
1. $\left\{\left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, 1\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $\left\{\left(\sin^2\left(\frac{n\pi}{100}\right), \cos^2\left(\frac{n\pi}{100}\right)\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
4. $\left\{\left(\frac{1}{2}e^{-n}, 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

84. Which of the following open covers of the open interval (0, 1) admit a finite subcover?
1. $\left\{\left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, 1\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $\left\{\left(\sin^2\left(\frac{n\pi}{100}\right), \cos^2\left(\frac{n\pi}{100}\right)\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
4. $\left\{\left(\frac{1}{2}e^{-n}, 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

85. X को सांस्थितिक समष्टि मानें। A_1, A_2 को X के दो सघन उपसमुच्चय मानें। यदि $E \subseteq X$, तब निम्न में कौन-से सही हैं?
1. $E \cap A_1$ E में सघन है
2. $E \cap A_1$ E में सघन है यदि E विवृत है
3. $E \cap A_1 \cap A_2$ E में सघन है यदि E विवृत है
4. $E \cap A_1 \cap A_2$ E में सघन है यदि E, A_1, A_2 सभी विवृत हैं

85. Let X be a topological space. Let A_1, A_2 be two dense subsets of X. If $E \subseteq X$, then which of the following are true?
1. $E \cap A_1$ is dense in E
2. $E \cap A_1$ is dense in E if E is open
3. $E \cap A_1 \cap A_2$ is dense in E if E is open
4. $E \cap A_1 \cap A_2$ is dense in E if E, A_1, A_2 are all open

86. $z \in \mathbb{C}$ के लिए, $f(z) = (z^3 + 1)\sin z^2$ मानें। $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ मानें, जहां $z = x + iy$ तथा u, v वास्तविक मान फलन हैं। तब निम्न में से कौन से सत्य हैं?
1. $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ अनंत: अवकलनीय है
2. u संतत है, परंतु आवश्यक नहीं कि अवकलनीय हो
3. u परिबद्ध है
4. सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, f को निरपेक्षत: अभिसारी घातश्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ से दिखाया जा सकता है

86. Let $f(z) = (z^3 + 1)\sin z^2$ for $z \in \mathbb{C}$. Let $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, where $z = x + iy$ and u, v are real valued functions. Then which of the following are true?

1. $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is infinitely differentiable
2. u is continuous but need not be differentiable
3. u is bounded
4. f can be represented by an absolutely convergent power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ for all $z \in \mathbb{C}$

87. $z \in \mathbb{C}$ के वास्तविक तथा अधिकल्पित भागों को क्रमश: $Re(z)$ तथा $Im(z)$ मान लें। डोमेन $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: Re(z) > |Im(z)|\}$ लें तथा $f_n(z) = log\, z^n$ मानें जहां $n \in \{1,2,3,4\}$ और जहां $log: C \setminus (-\infty, 0] \to C$ लघुगणक (logarithm) की मुख्य शाखा की परिभाषा है। तब निम्न में से कौन से सही हैं?

1. $f_1(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < \pi/4\}$
2. $f_2(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < \pi/2\}$
3. $f_3(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < 3\pi/4\}$
4. $f_4(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < \pi\}$

87. Let $Re(z), Im(z)$ denote the real and imaginary parts of $z \in \mathbb{C}$, respectively. Consider the domain $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: Re(z) > |Im(z)|\}$ and let $f_n(z) = log\, z^n$, where $n \in \{1,2,3,4\}$ and where $log: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ defines the principal branch of logarithm. Then which of the following are true?

1. $f_1(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < \pi/4\}$
2. $f_2(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < \pi/2\}$
3. $f_3(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < 3\pi/4\}$
4. $f_4(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \le |Im(z)| < \pi\}$

88. समुच्चय $F = \{f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f$ एक सर्वत्र वैश्लेपिक फलन है, $|f'(z)| \le |f(z)|\ z \in \mathbb{C}$ के लिए $\}$ पर विचार करें। तब निम्न में से कौन-से सत्य हैं?

1. F परिमित समुच्चय है
2. F अनंत समुच्चय है
3. $F = \{\beta e^{\alpha z}: \beta \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}\}$
4. $F = \{\beta e^{\alpha z}: \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| \le 1\}$

88. Consider the set
$F = \{f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f$ is an entire function, $|f'(z)| \le |f(z)|$ for all $z \in \mathbb{C}\}$.
Then which of the following are true?

1. F is a finite set
2. F is an infinite set
3. $F = \{\beta e^{\alpha z}: \beta \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}\}$
4. $F = \{\beta e^{\alpha z}: \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| \le 1\}$

89. मानें कि $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ तथा $\omega \in D$. $F_\omega: D \to D$ को $F_\omega(z) = \frac{\omega - z}{1 - \bar{\omega} z}$ से परिभाषित करें, तब निम्न में से कौन से सही हैं?

1. F एकैकी है
2. F एकैकी नहीं है
3. F आच्छादक है
4. F आच्छादक नहीं है

89. Let $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ and $\omega \in D$. Define $F_\omega: D \to D$ by $F_\omega(z) = \frac{\omega - z}{1 - \bar{\omega} z}$. Then which of the following are true?

1. F is one to one
2. F is not one to one
3. F is onto
4. F is not onto

90. $a \in \mathbb{Z}$ इस तरह मानें कि $a = b^2 + c^2$, जहां $b, c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, तब a को ऐसे नहीं लिख सकते

1. pd^2, जहां $d \in \mathbb{Z}$ तथा p अभाज्य है जबकि $p \equiv 1 (mod\ 4)$
2. pd^2, जहां $d \in \mathbb{Z}$ तथा p अभाज्य है जबकि $p \equiv 3 (mod\ 4)$
3. pqd^2, जहां $d \in \mathbb{Z}$ तथा p, q अभाज्य है जबकि $p \equiv 1 (mod\ 4), q \equiv 3\ (mod\ 4)$
4. pqd^2, जहां $d \in \mathbb{Z}$ तथा p, q भिन्न अभाज्य है जबकि $p, q \equiv 3\ (mod\ 4)$

90. Let $a \in \mathbb{Z}$ be such that $a = b^2 + c^2$, where $b, c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Then a **cannot** be written as

1. pd^2, where $d \in \mathbb{Z}$ and p is a prime with $p \equiv 1 (mod\ 4)$
2. pd^2, where $d \in \mathbb{Z}$ and p is a prime with $p \equiv 3 (mod\ 4)$
3. pqd^2, where $d \in \mathbb{Z}$ and p, q are primes with $p \equiv 1 (mod\ 4), q \equiv 3\ (mod\ 4)$
4. pqd^2, where $d \in \mathbb{Z}$ and p, q are distinct primes with $p, q \equiv 3\ (mod\ 4)$

Unit-3

91. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$ तथा $C = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 1\}$ मानें तथा f एवं g को संतत फलन मानें। मानें कि u निम्न फलनक का न्यूनतमीकारक (minimizer) है

$J[v] = \iint_B (v_x^2 + v_y^2 - 2fv)dxdy + \int_C (v^2 - 2gv)ds.$

तब u निम्न में से किसका हल है

1. $-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = g$
2. $\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} - u = g$
3. $-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g$
4. $\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g$

जहां $\frac{\partial u}{\partial n}$ बर्हिर्मुखी अभिलंब की दिशा में $(x,y) \in C$ पर u का दिशीय अवकलज है।

91. Let $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$ and $C = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 1\}$ and let f and g be continuous functions. Let u be the minimizer of the functional

$J[v] = \iint_B (v_x^2 + v_y^2 - 2fv)dxdy + \int_C (v^2 - 2gv)ds.$

Then u is a solution of

1. $-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = g$
2. $\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} - u = g$
3. $-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g$
4. $\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g$

where $\frac{\partial u}{\partial n}$ denotes the directional derivative of u in the direction of the outward drawn normal at $(x,y) \in C$

92. फलनक $J[y] = \int_0^1 \left[(y'(x))^2 + (y'(x))^3\right] dx,$ पर $y(0) = 1$ तथा $y(1) = 2$ के अंतर्गत विचार करें। तब

1. ऐसा चरम (extremal) y है कि $y \in C^1([0,1]) \backslash C^2([0,1])$
2. ऐसा चरम (extremal) y है कि $y \in C([0,1]) \backslash C^1([0,1])$
3. हर चरम (extremal) y $C^1([0,1])$ में है
4. हर चरम (extremal) y $C^2([0,1])$ में है

92. Consider the functional $J[y] = \int_0^1 \left[(y'(x))^2 + (y'(x))^3\right] dx$, subject to $y(0) = 1$ and $y(1) = 2$. Then

1. there exists an extremal $y \in C^1([0,1]) \backslash C^2([0,1])$
2. there exists an extremal $y \in C([0,1]) \backslash C^1([0,1])$
3. every extremal y belongs to $C^1([0,1])$
4. every extremal y belongs to $C^2([0,1])$

93. समाकलन समीकरण $\varphi(x) - \frac{e}{2}\int_{-1}^{1} xe^t \varphi(t)dt = f(x)$ पर विचार करें। तब

1. कोई संतत फलन $f: [-1,1] \to (0,\infty)$ है जिसके लिए हल उपलब्ध होगा
2. कोई संतत फलन $f: [-1,1] \to (-\infty, 0)$ है जिसके लिए हल उपलब्ध होगा
3. $f(x) = e^{-x}(1 - 3x^2)$ के लिए कोई हल होगा
4. $f(x) = e^{-x}(x + x^3 + x^5)$ के लिए कोई हल होगा

93. Consider the integral equation $\varphi(x) - \frac{e}{2}\int_{-1}^{1} xe^t \varphi(t)dt = f(x)$. Then

1. there exists a continuous function $f: [-1,1] \to (0,\infty)$ for which solution exists
2. there exists a continuous function $f: [-1,1] \to (-\infty, 0)$ for which solution exists
3. for $f(x) = e^{-x}(1 - 3x^2)$, a solution exists
4. for $f(x) = e^{-x}(x + x^3 + x^5)$, a solution exists

94. (q,p) को विहित चर मानें। निम्न रूपांतरणों पर सोचें

a) $(Q,P) = (\sqrt{2q}e^{\alpha}\cos p, \sqrt{2q}e^{-\alpha}\sin p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $(Q,P) = (q\tan p, \ \log(\sin p))$

c) $(Q,P) = (\frac{1}{p}, \ qp^2)$

तब

1. केवल (a) तथा (b) में दिए गए रूपांतरण विहित हैं
2. केवल (b) तथा (c) में दिए गए रूपांतरण विहित हैं
3. केवल (a) तथा (c) में दिए गए रूपांतरण विहित हैं
4. सभी विहित हैं

94. Let (q, p) be canonical variables. Consider the following transformations

a) $(Q, P) = (\sqrt{2q}e^{\alpha}\cos p, \sqrt{2q}e^{-\alpha}\sin p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $(Q, P) = (q\tan p, \log(\sin p))$

c) $(Q, P) = (\frac{1}{p}, qp^2)$

Then

1. only the transformations given in (a) and (b) are canonical
2. only the transformations given in (b) and (c) are canonical
3. only the transformations given in (a) and (c) are canonical
4. all are canonical

95. $y_1(x)$ को $y''(x) + xy(x) = 0,\ 0 < x < \infty$ का अतुच्छ वास्तविक मान वाला कोई हल मानें। $y_2(x)$ को $y''(x) + y(x) = x^2 + 2, y(0) = y'(0) = 0$ का हल मानें। तब

1. $y_1(x)$ में अपरिमितानेक शून्य हैं
2. $y_2(x)$ में अपरिमितानेक शून्य हैं
3. $y_1(x)$ में परिमितानेक शून्य हैं
4. $y_2(x)$ में परिमितानेक शून्य हैं

95. Let $y_1(x)$ be any non-trivial real valued solution of $y''(x) + xy(x) = 0,\ 0 < x < \infty$. Let $y_2(x)$ be the solution of $y''(x) + y(x) = x^2 + 2, y(0) = y'(0) = 0$. Then

1. $y_1(x)$ has infinitely many zeros.
2. $y_2(x)$ has infinitely many zeros.
3. $y_1(x)$ has finitely many zeros.
4. $y_2(x)$ has finitely many zeros.

96. समीकरण $y''(x) + a(x)y(x) = 0$ पर विचार करें, जहां $a(x)$ संतत फलन है जिसका आवर्तकाल T है। $\phi_1(x)$ तथा $\phi_2(x)$ को इन शर्तों को पूरा करने वाले हलों का आधार मानें $\phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0,\ \phi_2(0) = 0,\ \phi_2'(0) = 1$. $W(\phi_1, \phi_2)$ यदि ϕ_1 तथा ϕ_2 का रौंस्कियन हो, तब

1. $W(\phi_1, \phi_2) = 1$
2. $W(\phi_1, \phi_2) = e^x$
3. $\phi_1(T) + \phi_2'(T) = 2$ यदि दी गई अवकल समीकरण का T के साथ अतुच्छ आवर्ती हल है
4. $\phi_1(T) + \phi_2'(T) = 1$ यदि दी गई अवकल समीकरण का आवर्तकाल T के साथ अतुच्छ आवर्ती हल है

96. Consider the equation $y''(x) + a(x)y(x) = 0$, $a(x)$ is continuous function with period T. Let $\phi_1(x)$ and $\phi_2(x)$ be the basis for the solution satisfying $\phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0,\ \phi_2(0) = 0,\ \phi_2'(0) = .1$. Let $W(\phi_1, \phi_2)$ denote the Wronskian of ϕ_1 and ϕ_2. Then

1. $W(\phi_1, \phi_2) = 1$
2. $W(\phi_1, \phi_2) = e^x$
3. $\phi_1(T) + \phi_2'(T) = 2$ if the given differential equation has a nontrivial periodic solution with period T
4. $\phi_1(T) + \phi_2'(T) = 1$ if the given differential equation has a nontrivial periodic solution with period T

97. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को ऐसा लिपशिट्ज़ फलन मानें कि $f(x) = 0$ यदि और केवल यदि $x = \pm n^2$ जहां $n \in \mathbb{N}$. प्रारंभिक मान समस्या पर विचार करें: $y'(t) = f(y(t)), y(0) = y_0$. तब इनमें से कौन-से सत्य है?

1. y एकदिष्ठ फलन है, सभी $y_0 \in \mathbb{R}$ के लिए
2. किसी भी $y_0 \in \mathbb{R}$ के लिए, ऐसा $M_{y_0} > 0$ है कि सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिए $|y(t)| \le M_{y_0}$
3. ऐसा $y_0 \in \mathbb{R}$ है कि संगत हल अपरिबद्ध है
4. $\sup_{t,s\in\mathbb{R}}|y(t) - y(s)| = 2n + 1$ यदि $y_0 \in (n^2, (n+1)^2), n \ge 1$.

97. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz function such that $f(x) = 0$ if and only if $x = \pm n^2$ where $n \in \mathbb{N}$. Consider the initial value problem: $y'(t) = f(y(t)), y(0) = y_0$. Then which of the following are true?

1. y is a monotone function for all $y_0 \in \mathbb{R}$
2. for any $y_0 \in \mathbb{R}$, there exists $M_{y_0} > 0$ such that $|y(t)| \le M_{y_0}$ for all $t \in \mathbb{R}$
3. there exists a $y_0 \in \mathbb{R}$, such that the corresponding solution y is unbounded
4. $\sup_{t,s\in\mathbb{R}}|y(t) - y(s)| = 2n + 1$ if $y_0 \in (n^2, (n+1)^2), n \ge 1$

98. $(x+y)z\,z_x + (x-y)z\,z_y = x^2+y^2$ का सामान्य हल $z = z(x,y)$ है

1. $F(x^2+y^2+z^2, z^2-xy) = 0$ स्वेच्छ C^1 फलन F के लिए
2. $F(x^2-y^2-z^2, z^2-2xy) = 0$ स्वेच्छ C^1 फलन F के लिए
3. $F(x+y+z, z-2xy) = 0$ स्वेच्छ C^1 फलन F के लिए
4. $F(x^3-y^3-z^3, z-2x^2y^2) = 0$ स्वेच्छ C^1 फलन F के लिए

98. The general solution $z = z(x,y)$ of $(x+y)z\,z_x + (x-y)z\,z_y = x^2+y^2$ is

1. $F(x^2+y^2+z^2, z^2-xy) = 0$ for arbitrary C^1 function F
2. $F(x^2-y^2-z^2, z^2-2xy) = 0$ for arbitrary C^1 function F
3. $F(x+y+z, z-2xy) = 0$ for arbitrary C^1 function F
4. $F(x^3-y^3-z^3, z-2x^2y^2) = 0$ for arbitrary C^1 function F

99. यदि निम्न समस्या

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi), \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0, & y\in(0,\pi), \\ u(x,0)=0, u(x,\pi)=\sin(2x), & x\in(0,\pi). \end{array}\right\}$$

का हल u हो, तब

1. $\max\{u(x,y): 0\le x,y\le\pi\} = 1$
2. $u(x_0,y_0) = 1$ कुछ $(x_0,y_0)\in(0,\pi)\times(0,\pi)$ के लिए
3. $u(x,y) > -1$ सभी $(x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi)$ के लिए
4. $\min\{u(x,y): 0\le x,y\le\pi\} > -1$

99. Let u be the solution of the problem

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi), \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0, & y\in(0,\pi), \\ u(x,0)=0, u(x,\pi)=\sin(2x), & x\in(0,\pi). \end{array}\right\}$$

Then

1. $\max\{u(x,y): 0\le x,y\le\pi\} = 1$
2. $u(x_0,y_0) = 1$ for some $(x_0,y_0)\in(0,\pi)\times(0,\pi)$
3. $u(x,y) > -1$ for all $(x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi)$
4. $\min\{u(x,y): 0\le x,y\le\pi\} > -1$

100. सूत्र

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = ahf(-h)+bhf(0)+ahf(h) + ch^2f'(-h)-ch^2f'(h)$$

में रुंडन त्रुटि अल्पतम होने के लिए a,b,c के मान हैं

1. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{16}{15}, c=\frac{1}{15}$
2. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{16}{15}, c=\frac{-1}{15}$
3. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{-16}{15}, c=\frac{1}{15}$
4. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{-16}{15}, c=\frac{-1}{15}$

100. The values of a, b, c so that the truncation error in the formula

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = ahf(-h)+bhf(0)+ahf(h) + ch^2f'(-h)-ch^2f'(h)$$

is minimum, are

1. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{16}{15}, c=\frac{1}{15}$
2. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{16}{15}, c=\frac{-1}{15}$
3. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{-16}{15}, c=\frac{1}{15}$
4. $a=\frac{7}{15}, b=\frac{-16}{15}, c=\frac{-1}{15}$

101. समीकरण $x^2+ax+b=0$ पर विचार करें जिसके दो वास्तविक मूल α तथा β हैं। जब x_0 का मान α के काफ़ी पास का लिया जाता है, तो निम्न में से कौन-सी पुनरावर्ती स्कीम अभिसारी होगी?

1. $x_{n+1} = -\frac{ax_n+b}{x_n}$ यदि $|\alpha|>|\beta|$
2. $x_{n+1} = -\frac{x_n^2+b}{a}$, यदि $|\alpha|>1$
3. $x_{n+1} = -\frac{b}{x_n+a}$, यदि $|\alpha|<|\beta|$
4. $x_{n+1} = -\frac{x_n^2+b}{a}$, यदि $2|\alpha|<|\alpha+\beta|$

101. Consider the equation $x^2+ax+b=0$ which has two real roots α and β. Then which of the following iteration scheme converges when x_0 is chosen sufficiently close to α ?

1. $x_{n+1} = -\frac{ax_n+b}{x_n}$ if $|\alpha| > |\beta|$
2. $x_{n+1} = -\frac{x_n^2+b}{a}$, if $|\alpha| > 1$
3. $x_{n+1} = -\frac{b}{x_n+a}$, if $|\alpha| < |\beta|$
4. $x_{n+1} = -\frac{x_n^2+b}{a}$, if $2|\alpha| < |\alpha+\beta|$

102.

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array}\right\}$$

का हल u मान लें।

f, g यहां पर $C^2(\mathbb{R})$ में हैं। तथा निम्न प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

(i) $x \le 0$ के लिए $f(x) = g(x) = 0$,

(ii) $x > 0$ के लिए $0 < f(x) \le 1$,

(iii) $x > 0$ के लिए $g(x) > 0$,

(iv) $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$.

तब निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. $u(x,t) = 0$ सभी $x \le 0$ तथा $t > 0$ के लिए
2. $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ पर u परिबद्ध है
3. $u(x,t) = 0$ जब भी $x + t < 0$
4. $u(x,t) = 0$, $x + t > 0$ को संतुष्ट कर रहे कुछ (x,t) के लिए

102. Let u be the solution of

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array}\right\}$$

where f, g are in $C^2(\mathbb{R})$ and satisfy the following conditions.

(i) $f(x) = g(x) = 0$ for $x \le 0$,

(ii) $0 < f(x) \le 1$ for $x > 0$,

(iii) $g(x) > 0$ for $x > 0$

(iv) $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$.

Then, which of the following statements are true?

1. $u(x,t) = 0$ for all $x \le 0$ and $t > 0$
2. u is bounded on $\mathbb{R} \times (0,\infty)$.
3. $u(x,t) = 0$ whenever $x + t < 0$
4. $u(x,t) = 0$ for some (x,t) satisfying $x + t > 0$

Unit-4

103. यदि दो वर्गों में घनत्व क्रमश:
$f_1(x) = 1; 0 \le x \le 1$ तथा
$f_2(x) = 1 + \cos(2\pi x); 0 \le x \le 1$,
हों तो उन दोनों के बीच वर्गीकरण की समस्या पर विचार कीजिए। यह मानें कि दो वर्गों की पूर्व प्रायिकता बराबर हैं। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. बेज क्लासीफायर एक पर्यवेक्षण को वर्ग -1 में वर्गीकृत करता है यदि $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
2. वर्ग -1 से यादृच्छिक छांटे गए पर्यवेक्षण के गलत वर्गीकरण की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है
3. वर्ग-2 से एक यादृच्छिक छांटे गए पर्यवेक्षण के गलत वर्गीकरण की प्रायिकता $\frac{\pi-2}{2\pi}$ है
4. बेज वर्गीकरण के गलत वर्गीकरण की औसत प्रायिकता है $\frac{\pi-1}{2\pi}$ है

103. Consider a classification problem between two classes having densities
$f_1(x) = 1; 0 \le x \le 1$ and

$f_2(x) = 1 + \cos(2\pi x); 0 \le x \le 1$,
respectively. Assume that the prior probabilities of the two classes are equal. Which of the following are true?

1. The Bayes classifier classifies an observation to class-1 if $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
2. A randomly chosen observation from class-1 is misclassified with probability $\frac{1}{2}$
3. A randomly chosen observation from class-2 is misclassified with probability $\frac{\pi-2}{2\pi}$
4. The average misclassification probability of the Bayes classifier is $\frac{\pi-1}{2\pi}$

104. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N \sim i.i.d.\ N(\mu, \sigma^2)$ मानें जहां μ तथा σ^2 अज्ञात हैं। $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$ में से n साईज़ के एक SRSWR $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ एवं $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$ में से n साईज़ के SRSWOR $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ पर विचार करें। $Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i = N\bar{Y}$ का आकलन करने के लिए, $\hat{Y}_{WR} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ तथा $\hat{Y}_{WOR} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$ को परिभाषित करें। तब निम्न में से कौन-से सत्य हैं?

1. $\hat{Y}_{WR}$ का $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$ पर सप्रतिबंध प्रसरण $\frac{N(N-n)}{n(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2$ है
2. $\hat{Y}_{WOR}$ का $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$ पर सप्रतिबंध प्रसरण $\frac{N(N-n)}{n(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2$ है
3. $\hat{Y}_{WR}$ का अप्रतिबंध प्रसरण $\frac{N(N-1)}{n}\sigma^2$ है
4. $\hat{Y}_{WOR}$ का अप्रतिबंध प्रसरण $\frac{N^2}{n}\sigma^2$ है

104. Let $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N \sim i.i.d.\ N(\mu, \sigma^2)$, where μ and σ^2 are unknown. Consider a SRSWR $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ of size n from $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$, as well as a SRSWOR $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ of size n from $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$. To estimate $Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i = N\bar{Y}$, define $\hat{Y}_{WR} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ and $\hat{Y}_{WOR} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$. Then which of the following are true?

1. The conditional variance of $\hat{Y}_{WR}$ given $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$ is $\frac{N(N-n)}{n(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2$
2. The conditional variance of $\hat{Y}_{WOR}$ given $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$ is $\frac{N(N-n)}{n(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2$
3. The unconditional variance of $\hat{Y}_{WR}$ is $\frac{N(N-1)}{n}\sigma^2$
4. The unconditional variance of $\hat{Y}_{WOR}$ is $\frac{N^2}{n}\sigma^2$

105. एक डिज़ाईन जिसमें चार 'ट्रीटमेंट' और 2 प्लॉट प्रत्येकी तीन ब्लॉक वाले है, उसमें ट्रीटमेंट A तथा B ब्लॉक 1 तथा 3 को और ट्रीटमेंट C तथा D ब्लॉक 2 को दिया गया है। अत: परिणामी डिज़ाईन

1. अपूर्ण है
2. संबद्ध है
3. अ-लंबकोणीय (non-orthogonal) है
4. सभी 'एलीमेंटरी ट्रीटमेंट कन्ट्रास्ट' आकलनीय है

105. In a design with four treatments and three blocks of 2 plots each, treatments A and B are allotted to blocks 1 and 3 and treatments C and D are allotted to block 2. Hence the resulting design

1. is incomplete
2. is connected
3. is non-orthogonal
4. has all elementary treatment contrasts estimable

106. ऐसी प्रणाली के विषय में सोचिए जिसके दो घटकों के जीवनकाल उनकी क्षय दर (hazard rate) λ के साथ *i.i.d.* चर घातांकी हैं। यदि इन घटकों को श्रेणी क्रम तथा समांतर क्रम में रखे जाने पर प्रणाली के क्षय फलन (hazard functions) h_1 तथा h_2 हों, तो निम्न में से कौन-से सत्य हैं?

1. $h_2(t) < h_1(t)$ सभी $t > 0$ के लिए
2. $h_2(t) < \lambda$ सभी $t > 0$ के लिए
3. $h_1(t) < \lambda$ सभी $t > 0$ के लिए
4. h_2 ऐसा फलन है जो t के साथ दृढ़त: वृद्धिमान फलन है

106. Consider a system with two components whose lifetimes are *i.i.d.* exponential with hazard rate λ. Let h_1 and h_2 be the hazard functions of the system if the components are put in series and parallel, respectively. Then which of the following are true?

1. $h_2(t) < h_1(t)$ for all $t > 0$
2. $h_2(t) < \lambda$ for all $t > 0$
3. $h_1(t) < \lambda$ for all $t > 0$
4. h_2 is a strictly increasing function of t

107. आप कंपनी I तथा II में रु. 1000 निवेश करना चाहते हैं। यदि बाज़ार अच्छा है, तो कंपनी I द्वारा 50% का लाभांश घोषित होगा जबकि कंपनी II द्वारा 30% घोषित होगा। यदि बाज़ार खराब है, कंपनी I द्वारा 10% का लाभांश जबकि कंपनी II द्वारा 20% लाभांश घोषित होगा। पूर्वानुमान है कि बाज़ार के सुधरने की प्रायिकता 0.4 तथा खराब होने की प्रायिकता 0.6 है। अपेक्षित लाभांश को अधिकतमीकृत करने के लिए निवेश होना चाहिए

1. कंपनी I में रु. 1000 तथा कंपनी II में कुछ नहीं
2. कंपनी I में कुछ नहीं तथा कंपनी II में रु. 1000

3. प्रत्येक कंपनी में रु. 500
4. रु. 600 कंपनी I में तथा रु. 400 कंपनी II में

107. You want to invest Rs.1000 in companies I and II. If the market is good, company I will declare dividend of 50% while company II will declare 30%. If the market is bad, company I will declare dividend of 10% while company II will declare 20%. The prediction is that market will be good with probability 0.4 and bad with probability 0.6. The investment that maximizes expected dividend is
1. Rs. 1000 in company I and nil in company II
2. Nil in company I and Rs.1000 in company II
3. Rs. 500 in each of the two companies
4. Rs. 600 in company I and Rs.400 in company II

108. आगमन दर λ वाली एक M/M/1 पंक्ति पर विचार करें। मानें कि $t > 0$ के लिए t तक (t सम्मिलित) आगमनों की संख्या N_t है। $k \geq 1$ के लिए k-th ग्राहक का आगमन समय S_k मानें। $A_t = t - S_{N_t}$ पिछले आगमन के बाद गुज़रा समय हो, एवं $B_t = S_{N_t+1} - t$, समय t से अगले आगमन के लिए प्रतीक्षाकाल हो तो निम्न में से कौन-से सत्य हैं?
1. A_t अपरिबद्ध यादृच्छिक चर है
2. $E(A_t) = 1/\lambda$
3. B_t अपरिबद्ध यादृच्छिक चर है
4. $E(B_t) = 1/\lambda$

108. Consider an M/M/1 Queue with arrival rate λ. For $t > 0$, let N_t be the number of arrivals upto (and including) t. For $k \geq 1$, let S_k be the arrival time of the k-th customer. Let $A_t = t - S_{N_t}$ be the time elapsed after the last arrival and $B_t = S_{N_t+1} - t$ be the waiting time from t to the next arrival. Then which of the following are true?
1. A_t is an unbounded random variable
2. $E(A_t) = 1/\lambda$
3. B_t is an unbounded random variable
4. $E(B_t) = 1/\lambda$

109. मानिए कि एक अज्ञात प्रायिकता बंटन से युक्तिसंगत रूप से बड़े प्रादर्श $x_1, \cdots, x_n$ का उपयोग करते हुए एक प्रसामान्य $Q - Q$ आरेख बनाया जाता है। निम्न में से किस बंटन के लिए $Q - Q$ आरेख के उत्तल होने की अपेक्षा है (J की आकृति का)?
1. बीटा (5, 1)
2. चरघातांकी (1)
3. एकसमान (0, 1)
4. गुणोत्तर (1/2)

109. Suppose a normal $Q - Q$ plot is drawn using a reasonably large sample $x_1, \cdots, x_n$ from an unknown probability distribution. For which of the following distributions would you expect the $Q - Q$ plot to be convex (J − shaped)?
1. Beta (5, 1)
2. Exponential (1)
3. Uniform (0, 1)
4. Geometric (1/2)

110. $(X_n, n \geq 1)$ तथा X किसी प्रायिकता समष्टि पर यादृच्छिक चर हैं। मानिए कि X_n का X में अभिसरण प्रायिकता में होता है। निम्न में से कौन-से सत्य हैं?
1. $E(|X_n - X|^2) \to 0$
2. $P(X_n \leq x) \to P(X \leq x)$ सभी $x \in \mathbb{R}$
3. $E\left(Min(1, |X_n - X|)\right) \to 0$
4. प्रायिकता 1 के साथ $|X_n - X| \to 0$

110. $(X_n, n \geq 1)$ and X are random variables on a probability space. Suppose that X_n converges to X in probability. Which of the following are true?
1. $E(|X_n - X|^2) \to 0$
2. $P(X_n \leq x) \to P(X \leq x)$ for all $x \in \mathbb{R}$
3. $E\left(Min(1, |X_n - X|)\right) \to 0$
4. $|X_n - X| \to 0$ with probability 1

111. पूर्णांकों पर एक सरल सममित यादृच्छिक भ्रमण पर विचार करें जहां हर अवस्था i से अवस्था $i - 1$ तथा $i + 1$ प्रत्येक में जानें की प्रायिकता आधी है। तब निम्न में से कौन से सही हैं?
1. यादृच्छिक भ्रमण अनावर्ती है
2. यादृच्छिक भ्रमण अलघुकरणीय (irreducible) है

3. यादृच्छिक भ्रमण शून्य पुनरावर्ती (null recurrent) है
4. यादृच्छिक भ्रमण धनात्मक पुनरावर्ती (positive recurrent) है

111. Consider a simple symmetric random walk on integers, where from every state i you move to $i-1$ and $i+1$ with probability half each. Then which of the following are true?
1. The random walk is aperiodic
2. The random walk is irreducible
3. The random walk is null recurrent
4. The random walk is positive recurrent

112. अवस्था समष्टि {0, 1, 2} तथा संक्रमण आव्यूह

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

वाली मार्कोव श्रृंखला पर विचार करें। तब निम्न में से कौन से सत्य हैं?
1. $\lim_{n\to\infty} \; p_{12}^{(n)} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \; p_{12}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \; p_{21}^{(n)}$
3. $\lim_{n\to\infty} \; p_{22}^{(n)} = \frac{1}{8}$
4. $\lim_{n\to\infty} \; p_{21}^{(n)} = \frac{1}{3}$

112. Consider a Markov Chain with state space {0, 1, 2} and transition matrix

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Then which of the following are true?
1. $\lim_{n\to\infty} \; p_{12}^{(n)} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \; p_{12}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \; p_{21}^{(n)}$
3. $\lim_{n\to\infty} \; p_{22}^{(n)} = \frac{1}{8}$
4. $\lim_{n\to\infty} \; p_{21}^{(n)} = \frac{1}{3}$

113. X, Y को $i.i.d.$ द्विपद (n, p) यादृच्छिक चर मानें। निम्न में से कौन से सत्य हैं?
1. $X + Y \sim Bin\,(2n, p)$
2. $(X, Y) \sim$ बहुपद $(2n;\, p, p)$
3. $Var(X - Y) = E(X - Y)^2$
4. $Cov(X + Y, X - Y) = 0$

113. Suppose X, Y are $i.i.d.$ Binomial (n, p) random variables. Which of the following are true?
1. $X + Y \sim Bin\,(2n, p)$
2. $(X, Y) \sim Multinomial\,(2n;\, p, p)$
3. $Var(X - Y) = E(X - Y)^2$
4. $Cov(X + Y, X - Y) = 0$

114. मानें कि $X_1, X_2, \cdots$ $i.i.d.$ $N(0, \sigma^2)$ है, जहां $\sigma^2 (> 0)$ अज्ञात है। σ^2 के लिए आकलकों के इस वर्ग पर सोचें
$\{T_n = C_n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \, : \, C_n > 0, n \geq 1\}$
तब निम्न में से कौन से सही हैं?
1. σ^2 के लिए T_n संगत है यदि $C_n = \frac{1}{n-1}$
2. σ^2 के लिए T_n अनभिनत है यदि $C_n = \frac{1}{n}$
3. σ^2 के लिए T_n संगत है यदि $C_n = \frac{1}{n+1}$
4. T_n का MSE न्यूनतमीकृत है यदि $C_n = \frac{1}{n+2}$

114. Let $X_1, X_2, \cdots$ be $i.i.d.$ $N(0, \sigma^2)$, where $\sigma^2 (> 0)$ is unknown. Consider a class of estimators

$$\left\{T_n = C_n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \, : \, C_n > 0, n \geq 1\right\}$$

for σ^2. Then which of the following are true?
1. T_n is consistent for σ^2 if $C_n = \frac{1}{n-1}$
2. T_n is unbiased for σ^2 if $C_n = \frac{1}{n}$
3. T_n is consistent for σ^2 if $C_n = \frac{1}{n+1}$
4. MSE of T_n is minimised if $C_n = \frac{1}{n+2}$

115. X_1, X_2 को $i.i.d.$ यादृच्छिक चर मानें जिनका p.d.f.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

$H_0: \theta = 2$ के विरूद्ध $H_1: \theta = 3$ के परीक्षण के लिए निम्न परीक्षण सुझाये गए हैं

परीक्षण 1: H_0 को अस्वीकार करें यदि और केवल यदि $\max\{X_1, X_2\} \leq 1$

परीक्षण 2: H_0 को अस्वीकार करें यदि और केवल यदि $\max\{X_1, X_2\} \geq 1$

परीक्षण $i, i = 1, 2$ के लिए टाईप I त्रुटि की प्रायिकता α_i मानें। निम्न में से कौन से सही हैं ?

1. परीक्षण 1 है 0.05 लेवल का परीक्षण
2. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$
3. परीक्षण 2 अनभिनत है
4. परीक्षण 1 अनभिनत है

115. Let X_1, X_2 be *i.i.d.* random variables with p.d.f.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

For testing $H_0: \theta = 2$ against $H_1: \theta = 3$, the following tests are suggested.

Test 1: Reject H_0 if and only if $\max\{X_1, X_2\} \leq 1$

Test 2: Reject H_0 if and only if $\max\{X_1, X_2\} \geq 1$

Let α_i denote the probability of Type I error for Test i, $i = 1, 2$. Which of the following are true?

1. Test 1 is a level 0.05 test
2. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$
3. Test 2 is unbiased
4. Test 1 is unbiased

116. S_θ को वर्ग क्षेत्र मानें जिसके चार शीर्ष $(\theta, 0), (0, \theta), (-\theta, 0)$ तथा $(0, -\theta)$ हैं, जहां $\theta > 0$ अज्ञात है। मानें कि $\binom{X}{Y}$, S_θ पर एक-समान रूप में बंटन का अनुसरण करता है। निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. X तथा Y असहसंबद्ध हैं
2. X तथा Y स्वतंत्र हैं
3. $|X| + |Y|$ का मान θ से अधिक नहीं हो सकता
4. यदि $\binom{x_1}{y_1}$ तथा $\binom{x_2}{y_2}$ स्वतंत्र रूप से किए गए दो पर्यवेक्षण है, तब θ के लिए उच्चतम प्रायिकता आकलन है $\max\{|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|\}$

116. Let S_θ be the square region with four vertices $(\theta, 0), (0, \theta), (-\theta, 0)$ and $(0, -\theta)$, where $\theta > 0$ is unknown. Suppose that $\binom{X}{Y}$ follows the uniform distribution on S_θ. Which of the following statements are true?

1. X and Y are uncorrelated
2. X and Y are independent
3. $|X| + |Y|$ cannot exceed θ
4. If $\binom{x_1}{y_1}$ and $\binom{x_2}{y_2}$ are two observations drawn independently, then the maximum likelihood estimate of θ is $\max\{|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|\}$

117. यदि $X_1, X_2, \cdots, X_{2n-1} (n > 5)$ को ऐसा *i.i.d.* मानें जिसका p.d.f. f_θ परिबद्ध आलंब (bounded support) वाला हो तथा θ के सापेक्ष सममित हो। $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(2n-1)}$ यादृच्छिक चर $X_1, X_2, \cdots, X_{2n-1}$ का क्रम प्रतिदर्शज है। निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. $X_{(1)} - \theta$ तथा $\theta - X_{(1)}$ के एक-जैसे बंटन हैं
2. $X_{(1)} - \theta$ तथा $\theta - X_{(2n-1)}$ के एक-जैसे बंटन हैं
3. $X_{(n)}$ का बंटन θ के सापेक्ष सममित है
4. $E[X_{(k)} + X_{(2n-k)}]$ सभी $k = 1, 2, \cdots, n$ के लिए एक-जैसा है

117. Let $X_1, X_2, \cdots, X_{2n-1} (n > 5)$ be *i.i.d.* with p.d.f. f_θ, which is symmetric about θ having bounded support. Let $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(2n-1)}$ be the order statistics of the random variables $X_1, X_2, \cdots, X_{2n-1}$. Which of the following statements are correct?

1. $X_{(1)} - \theta$ and $\theta - X_{(1)}$ have the same distribution
2. $X_{(1)} - \theta$ and $\theta - X_{(2n-1)}$ have the same distribution
3. The distribution of $X_{(n)}$ is symmetric about θ
4. $E[X_{(k)} + X_{(2n-k)}]$ is same for all $k = 1, 2, \cdots, n$

118. $\boldsymbol{X}$ अनुसरण करता है p-विचर $(p > 2)$ बंटन का जहां $E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}$ तथा $\text{Var}(\boldsymbol{X}) = \Sigma$ है, तो निम्न में से कौन से सत्य हैं ?

1. $E(\boldsymbol{XX'}) = \Sigma + \boldsymbol{\mu\mu'}$
2. $E(\boldsymbol{X'X}) = \boldsymbol{\mu'\mu} + trace(\Sigma)$

3. $E\left((X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right) = p$

4. $P[(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu) \geq t^2] \leq \frac{p}{t^2}$, $t \neq 0$ के लिए

118. X follows a p-variate ($p > 2$) distribution with $E(X) = \mu$ and Var $(X) = \Sigma$. Which of the following are true?

1. $E(XX') = \Sigma + \mu\mu'$
2. $E(X'X) = \mu'\mu + trace(\Sigma)$
3. $E\left((X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right) = p$
4. $P[(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu) \geq t^2] \leq \frac{p}{t^2}$, for $t \neq 0$

119. एकल समाश्रयी x वाले वृद्धिघात समाश्रयण मॉडेल (logistic regression model) पर विचार करें, जहां लॉग संयोगानुपात (log odds ratio) का अंतःखंड β_0 तथा ढाल β_1 है। $x = 0$ तथा $x = -1$ पर सफलता के संयोगानुपातों का अनुपात T_1 मानें। इसी प्रकार $x = 1$ तथा $x = 0$ पर सफलता के जो संयोगानुपात होंगे उनका अनुपात T_2 मानें तो निम्न में से कौन से सही हैं?

1. $T_1 = T_2$
2. $T_1T_2 = 1$
3. $T_1T_2 = e^{\beta_0}$
4. $T_1T_2 = e^{2\beta_1}$

119. Consider a logistic regression model with a single regressor x, where the log odds ratio has intercept β_0 and slope β_1. Let T_1 be the ratio of the odds of success when $x = 0$ to that when $x = -1$. Similarly, let T_2 be the ratio of the odds of success when $x = 1$ to that when $x = 0$. Which of the following are true?

1. $T_1 = T_2$
2. $T_1T_2 = 1$
3. $T_1T_2 = e^{\beta_0}$
4. $T_1T_2 = e^{2\beta_1}$

120. मानें कि $b_1, b_2, \cdots, b_{10} \sim i.i.d.\, N(0, \tau^2)$ तथा $b_1, b_2, \cdots, b_{10}$ से स्वतंत्र रूप से $i = 1, 2, \cdots, 10$; $j = 1, 2, \cdots, n$, के लिए $\epsilon_{ij} \sim i.i.d.\, N(0, \sigma^2)$ हैं। $X_{ij} = b_i + \epsilon_{ij}$ परिभाषित करें। σ^2 के आकलक की तरह, प्रतिदर्शज (statistic) $T_n = \frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2$

1. अनभिनत है
2. $n \to \infty$ के साथ संगत है
3. अनभिनत है केवल तब जब $\tau^2 = 0$
4. $n \to \infty$ के साथ संगत है, केवल तब जब $\tau^2 = 0$

120. Let $b_1, b_2, \cdots, b_{10} \sim i.i.d.\, N(0, \tau^2)$ and $\epsilon_{ij} \sim i.i.d.\, N(0, \sigma^2)$ for $i = 1, 2, \cdots, 10$; $j = 1, 2, \cdots, n$, independently of $b_1, b_2, \cdots, b_{10}$. Define $X_{ij} = b_i + \epsilon_{ij}$. As an estimator of σ^2, the statistic

$$T_n = \frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2$$

is

1. unbiased
2. consistent as $n \to \infty$
3. unbiased only when $\tau^2 = 0$
4. consistent as $n \to \infty$ only when $\tau^2 = 0$

H

For rough work

For rough work

For rough work