PREVIEW QUESTION BANK(Dual)

Module Name : MATHEMATICAL SCIENCES
Exam Date : 07-Jun-2023 Batch : 15:00-18:00

Sr. No.	Client Question ID	Question Body and Alternatives	Marks	Negative Marks
Objective Question				
1	704001	**A** and **B** have in their collection, coins of Re. 1, Rs. 2, Rs. 5 and Rs. 10 in the ratio 3:2:2:1 and 4:3:2:1, respectively. The total number of coins with each of them is equal. If the value of coins with **A** is Rs. 270/-, what is the value of the coins (in Rs) with **B**? 1. 213 2. 240 3. 275 4. 282 सिक्कों के अपने अपने संग्रह में **A** और **B** के पास 1 रु, 2 रु, 5 रु, और 10 रु के सिक्के क्रमशः 3:2:2:1 और 4:3:2:1 के अनुपात में हैं। सिक्कों की कुल संख्या प्रत्येक के पास समान है। यदि **A** के सिक्कों की कीमत 270 रु है, **B** के सिक्कों की कीमत (रु में) कितनी है? 1. 213 2. 240 3. 275 4. 282 A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	2.0	0.50
Objective Question				
2	704002	If the speed of a train is increased by 20%, its travel time between two stations reduces by 2 hrs. If its speed is decreased by 20%, the travel time increases by 3 hrs. What is the normal duration of travel (in hrs)? 1. 11.5 2. 12.0 3. 13.2 4. 14.0	2.0	0.50

		यदि एक रेलगाड़ी की गति 20% बढ़ा दी जाये तो दो स्टेशनों के बीच इसकी यात्रा का समय 2 घंटे घट जाता है। यदि इसकी गति 20% कम कर दी जाये तो यात्रा का समय 3 घंटे बढ़ जाता है। यात्रा में सामान्यतः कितना समय (घंटों में) लगता है? 1. 11.5 2. 12.0 3. 13.2 4. 14.0 A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		
Objective Question				
3	704003	Person A tells the truth 30% of the times and B tells the truth 40% of the times, independently. What is the minimum probability that they would contradict each other? 1. 0.18 2. 0.42 3. 0.46 4. 0.50 एक व्यक्ति A, 30% बार सच बोलता है और स्वतंत्र रूप से व्यक्ति B, 40% बार सच बोलता है। वे दोनों एकदूसरे का खंडन करेंगे, इसकी न्यूनतम प्रायिकता कितनी है? 1. 0.18 2. 0.42 3. 0.46 4. 0.50 A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	2.0	0.50

Objective Question				
4	704004	The standard deviation of data $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ is σ (σ >0). Then the standard deviation of data $3x_1+2, 3x_2+2, 3x_3+2, \ldots, 3x_n+2$ is 1. 3σ 2. σ 3. $3\sigma+2$ 4. 9σ डाटा $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का मानक विचलन σ (σ >0)। तब डाटा $3x_1+2, 3x_2+2, 3x_3+2, \ldots, 3x_n+2$ का मानक विचलन है 1. 3σ 2. σ 3. $3\sigma+2$ 4. 9σ A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	2.0	0.50
Objective Question				
5	704005	A device needs 4 batteries to run. Each battery runs for 2 days. If there are a total of 6 batteries available, what is the maximum number of days for which the device can be run by strategically replacing the batteries till all the batteries are completely drained of power? 1. 2 2. 3 3. 4 4. 5 एक उपकरण के चालन में 4 बैटरियां आवश्यक हैं। प्रत्येक बैटरी 2 दिन चलती है। 6 बैटरियों को रणनीतिक रूप से बदल कर उपकरण को अधिकतम कितने दिनों के लिए चलाया जा सकता है जब तक कि उनकी शक्ति पूर्णतः समाप्त न हो जाये? 1. 2 2. 3 3. 4 4. 5	2.0	0.50

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		

Objective Question

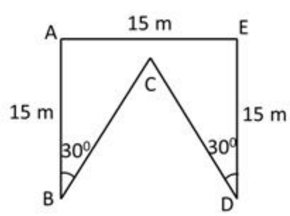
6	704006	The difference of the squares of two distinct two-digit numbers with one being obtained by reversing the digits of the other is always divisible by 1. 4 2. 6 3. 10 4. 11 दो पृथक दो-अंकों की संख्याओं के वर्गों का अंतर, जिनमें से एक संख्या दूसरी संख्या के अंकों को उलट कर बनायी गयी हो, जिससे हमेशा विभाज्य है, वह है 1. 4 2. 6 3. 10 4. 11 A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	2.0	0.50

Objective Question

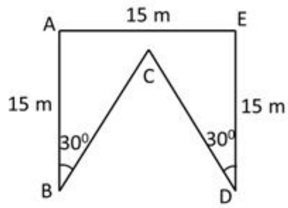
7	704007	A person takes loan of Rs. 1,50,000 at a compound interest rate of 10% per annum. If the loan is repaid at the end of the 3rd year, what is the total interest paid? 1. 45000 2. 82600 3. 94600 4. 49650	2.0	0.50

		एक व्यक्ति 1,50,000 रु का ऋण चक्रवृद्धि ब्याज दर 10% प्रतिवर्ष पर लेता है। यदि ऋण को तीसरे वर्ष की समाप्ति पर चुका दिया जाये तो कुल कितना ब्याज अदा किया जायेगा? 1. 45000 2. 82600 3. 94600 4. 49650 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4		

Objective Question

8	704008	The figure shows map of a field bounded by ABCDE. If AB and DE are perpendicular to AE, then the perimeter of the field is  1. 70 m 2. 75 m 3. 80 m 4. 85 m	2.0	0.50

चित्र एक क्षेत्र का नक्शा दिखाता है जो ABCDE से परिबद्ध है। यदि AE के लंबवत AB और DE हैं, तब क्षेत्र की परिमिति है



1. 70 मी
2. 75मी
3. 80 मी
4. 85 मी

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

9	704009	The ratio of ages of a mother and daughter is 14:1 at present. After four years, the ratio of their ages will be 16:3. What was the age of mother when the daughter was born?	2.0	0.50

1. 26
2. 28
3. 30
4. 32

वर्तमान में एक माता और पुत्री की आयु 14:1 के अनुपात में हैं। चार वर्ष पश्चात, उनकी आयु का अनुपात 16:3 होगा। पुत्री के जन्म के समय माता की आयु कितनी थी?

1. 26
2. 28
3. 30
4. 32

A1 : 1

1

A2 : 2

		A3: 3 3 A4: 4 4		

Objective Question

10	704010	Five identical incompressible spheres of radius 1 unit are stacked in a pyramidal form as shown in the figure. The height of the structure is Top view 1. $2+\sqrt{2}$ 2. $2+\sqrt{3}$ 3. $2+2\sqrt{2/3}$ 4. 3 इकाई त्रिज्या के पांच एकसमान असंपीड्य गोलों का एक ढेर पिरामिड के रूप में चित्र में दर्शाये अनुसार बनाया गया है। इस संरचना की ऊंचाई है Top view शीर्ष दृश्य 1. $2+\sqrt{2}$ 2. $2+\sqrt{3}$ 3. $2+2\sqrt{2/3}$ 4. 3 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	2.0	0.50

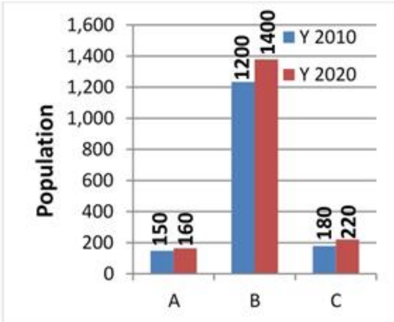
Objective Question

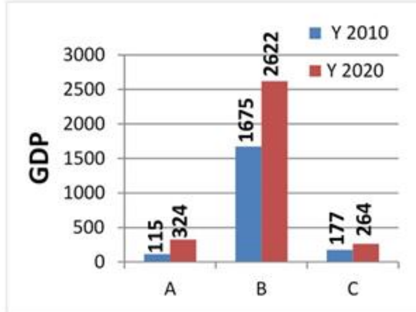
11	704011	In an assembly election, parties A, B, C, D and E won 30, 25, 20, 10 and 4 seats, respectively; whereas independents won 9 seats. Based on this data, which of the following statements must be INCORRECT? 1. No party has majority. 2. A and C together can form the government. 3. A and D with the support of independents get the majority. 4. An MLA from E can become Chief Minister. एक विधान सभा के चुनावों में दलों A, B, C, D, और E ने क्रमशः 30, 25, 20, 10, और 4 स्थानों पर विजय पायी, जबकि निर्दलियों ने 9 स्थानों पर विजय प्राप्त की। इन आंकड़ों के आधार पर, निम्नलिखित में से कौनसा कथन ग़लत होगा? 1. किसी भी दल को बहुमत नहीं है। 2. A और C मिल कर सरकार बना सकते हैं। 3. A और D, निर्दलियों के साथ मिल कर बहुमत पाते हैं। 4. E का एक विधायक मुख्यमंत्री बन सकता है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	2.0	0.50

Objective Question

12	704012		2.0	0.50

The populations and gross domestic products (GDP) in billion USD of three countries A, B and C in the years 2010 and 2020 are shown in the two figures below.

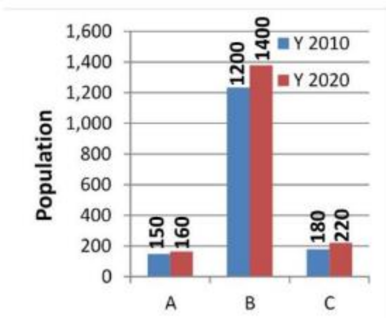


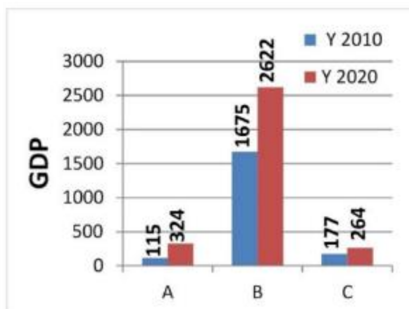


In terms of increase in per capita GDP from 2010-2020, their ranking from high to low is

1. A, B, C
2. B, A, C
3. B, C, A
4. C, A, B.

वर्षों 2010 और 2020 में तीन देशों A, B, और C की जनसँख्या और, अरब अमेरिकी डॉलर में सकल घरेलू उत्पाद (GDP) को दो चित्रों में नीचे दिया गया है।





2010 से 2020 में प्रति व्यक्ति जीडीपी में वृद्धि के रूप में, उनकी उच्च से निम्न श्रेणी है

1. A, B, C
2. B, A, C
3. B, C, A
4. C, A, B.

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

13	704013	Consider the following paragraph: THE ABILITY TO REASON ACCURATELY IS VERY IMPORTANT, AS IS THE ABILITY TO COUNT. AS AN EXERCISE IN BOTH, LET US COUNT HOW MANY TIMES THE LETTER "E" OCCURS IN THIS PARAGRAPH. THE CORRECT COUNT IS ___ . Which option when put in the blank in the above paragraph will make the final sentence accurate? 1. SIXTEEN 2. SEVENTEEN 3. EIGHTEEN 4. NINETEEN निम्नलिखित अनुच्छेद पर गौर करें: THE ABILITY TO REASON ACCURATELY IS VERY IMPORTANT, AS IS THE ABILITY TO COUNT. AS AN EXERCISE IN BOTH, LET US COUNT HOW MANY TIMES THE LETTER "E" OCCURS IN THIS PARAGRAPH. THE CORRECT COUNT IS ___ . उपर्युक्त अनुच्छेद के रिक्त स्थान में किस विकल्प का रखना अंतिम वाक्य को एकदम सही बना देगा? 1. SIXTEEN 2. SEVENTEEN 3. EIGHTEEN 4. NINETEEN A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	2.0	0.50

Objective Question

14	704014	Two datasets A and B have the same mean. Which of the following **MUST** be true? 1. Sum of the observations in A = Sum of the observations in B. 2. Mean of the squares of the observations in A = Mean of the squares of the observations in B. 3. If the two datasets are combined, then the mean of the combined dataset = mean of A + mean of B. 4. If the two datasets are combined, then the mean of the combined dataset = mean of A.	2.0	0.50

आंकड़ों के दो समूहों A और B के माध्य समान हैं। निम्नलिखित में से कौनसा आवश्यक रूप से सत्य होना चाहिए?

1. A के प्रेक्षणों का योग = B के प्रेक्षणों का योग

2. A के प्रेक्षणों के वर्गों का माध्य = B के प्रेक्षणों के वर्गों का माध्य

3. यदि आंकड़ों के दोनों समूहों का संयोजन कर लिया जाये, तब संयोजित आंकड़ों के समूह का माध्य = A का माध्य + B का माध्य

4. यदि आंकड़ों के दोनों समूहों का संयोजन कर लिया जाये, तब संयोजित आंकड़ों के समूह का माध्य = A का माध्य

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

15	704015	In a meeting of 45 people, there are 40 people who know one another and the remaining know no one. People who know each other only hug, whereas those who do not know each other only shake hands. How many handshakes occur in this meeting? 1. 225 2. 10 3. 210 4. 200 45 लोगों की एक बैठक में, 40 लोग एकदूसरे को जानते हैं और शेष किसी को भी नहीं जानते हैं। जो लोग एकदूसरे को जानते हैं, केवल गले मिलते हैं, जबकि जो एकदूसरे को नहीं जानते हैं केवल हाथ मिलाते हैं। इस बैठक में कितने हाथ-मिलान होते हैं? 1. 225 2. 10 3. 210 4. 200 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3	2.0	0.50

		A4: 4 4		

Objective Question

16	704016	In a group of 7 people, 4 have exactly one sibling and 3 have exactly two siblings. Two people selected at random from the group, what is the probability that they are NOT siblings? 1. 5/21 2. 16/21 3. 3/7 4. 4/7 एक समूह जिसमें 7 लोग हैं, 4 के ठीक एक सहोदर है और 3 के ठीक दो सहोदर हैं। समूह से यादृच्छिक रूप से चयित दो लोगों की क्या प्रायिकता है कि वे सहोदर नहीं हैं? 1. 5/21 2. 16/21 3. 3/7 4. 4/7 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	2.0	0.50

Objective Question

17	704017	On a spherical globe of radius 10 units, the distance between **A** and **B** is 25 units. If it is uniformly expanded to a globe of radius 50 units, the distance between them in the same units would be 1. 75 2. 125 3. 150 4. 625	2.0	0.50

एक 10 इकाई त्रिज्या के गोलाकार ग्लोब पर **A** और **B** के बीच की दूरी 25 इकाई है। यदि इसे एकरूपता से 50 इकाई त्रिज्या के ग्लोब में विस्तारित किया जाता है, उन्हीं इकाइयों में उनके (A और B के) बीच की दूरी होगी

1. 75
2. 125
3. 150
4. 625

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

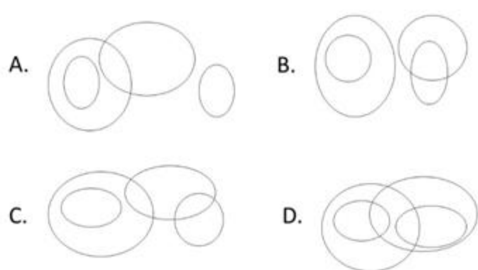
A4: 4

4

Objective Question

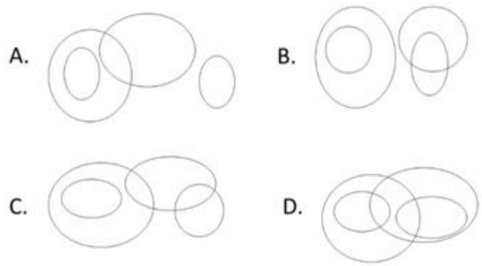
18 | 704018 | 2.0 | 0.50

An appropriate diagram to depict the relationships between the categories INSECTS, BIRDS, EXTINCT ANIMALS and PEACOCKS is



1. A
2. B
3. C
4. D

कीड़ों, पक्षियों, विलुप्त जानवरों और मोरों के समूहों के बीच संबंध बताता एक उपयुक्त आरेख है



1. A
2. B
3. C
4. D

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

19	704019	A boy can escape through a window of size at least 4 feet. The 28 windows of a house are of sizes 2, 3, 4 or 5 feet and their numbers are proportional to their sizes. The number of windows available for the boy to escape through is	2.0	0.50

1. 2
2. 9
3. 10
4. 18

एक लड़का कम-से-कम एक 4 फुट की खिड़की से निकल भाग सकता है। घर की 28 खिड़कियों के माप 2, 3, 4, और 5 फुट हैं और उनकी संख्याएँ उनके माप के समानुपाती हैं। लड़के के लिए निकल भागने के लिए उपलब्ध खिड़कियों की संख्या है

1. 2
2. 9
3. 10
4. 18

A1: 1

1

		A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4		

Objective Question

20	704020	In an examination containing 10 questions, each correct answer is awarded 2 marks, each incorrect answer is awarded −1 and each unattempted question is awarded zero. Which of the following CANNOT be a possible score in the examination? 1. −9 2. −7 3. 17 4. 19 एक 10 प्रश्नों की परीक्षा में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 2 अंक दिए जाते हैं, प्रत्येक ग़लत उत्तर के लिए −1 अंक दिया जाता है, और प्रत्येक छोड़े गए प्रश्न के लिए शून्य दिया जाता है। परीक्षा में निम्नलिखित में से कौनसा संभावित प्राप्तांक **नहीं हो सकता** है? 1. −9 2. −7 3. 17 4. 19 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	2.0	0.50

Objective Question

21	704021	Suppose S is an infinite set. Assuming that the axiom of choice holds, which of the following is true? 1. S is in bijection with the set of rational numbers. 2. S is in bijection with the set of real numbers. 3. S is in bijection with $S \times S$. 4. S is in bijection with the power set of S.	3.0	0.75

मानें कि S एक अनंत समुच्चय है। यह मानते हुए कि चयन का अभिगृहीत (axiom of choice) लागू है, निम्न में से कौन सा सत्य है?

1. S परिमेय संख्याओं के समुच्चय के साथ एकैकी आच्छादन में है।

2. S वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के साथ एकैकी आच्छादन में है।

3. $S \times S$ के साथ S एकैकी आच्छादन में है।

4. S के घात समुच्चय (power set) के साथ S एकैकी आच्छादन में है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

22	704022	Consider the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, where $a_n = (-1)^{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Which of the following statements is true? 1. The series is divergent. 2. The series is convergent. 3. The series is conditionally convergent. 4. The series is absolutely convergent. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, पर विचार करें जहां $a_n = (-1)^{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ है। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सत्य है? 1. श्रेणी अपसारी (divergent) है। 2. श्रेणी अभिसारी (convergent) है। 3. श्रेणी सशर्त (conditionally) अभिसारी है। 4. श्रेणी परम (absolutely) अभिसारी है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75

Objective Question

23	704023	Let $x, y \in [0,1]$ be such that $x \neq y$. Which of the following statements is true for every $\epsilon > 0$? 1. There exists a positive integer N such that $\|x - y\| < 2^n\epsilon$ for every integer $n \geq N$. 2. There exists a positive integer N such that $2^n\epsilon < \|x - y\|$ for every integer $n \geq N$. 3. There exists a positive integer N such that $\|x - y\| < 2^{-n}\epsilon$ for every integer $n \geq N$. 4. For every positive integer N, $\|x - y\| < 2^{-n}\epsilon$ for some integer $n \geq N$. मानें कि $x, y \in [0,1]$ इस प्रकार से है कि $x \neq y$ है। निम्न में से कौन सा वक्तव्य हर $\epsilon > 0$ के लिए सत्य है? 1. ऐसा कोई धनात्मक पूर्णांक N है कि हर पूर्णांक $n \geq N$ के लिए $\|x - y\| < 2^n\epsilon$ 2. ऐसा कोई धनात्मक पूर्णांक N है कि हर पूर्णांक $n \geq N$ के लिए $2^n\epsilon < \|x - y\|$ 3. ऐसा कोई धनात्मक पूर्णांक N है कि हर पूर्णांक $n \geq N$ के लिए $\|x - y\| < 2^{-n}\epsilon$ 4. सभी धनात्मक पूर्णांक N के लिए, किसी पूर्णांक $n \geq N$ के लिए $\|x - y\| < 2^{-n}\epsilon$ A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	3.0	0.75
Objective Question				
24	704024	Which of the following assertions is correct? 1. $\limsup_n \; e^{\cos\left(\frac{n\pi+(-1)^n 2e}{2n}\right)} > 1.$ 2. $\lim_n e^{\log_e\left(\frac{n\pi^2+(-1)^n e^2}{7n}\right)}$ does not exist. 3. $\liminf_n \; e^{\sin\left(\frac{n\pi+(-1)^n 2e}{2n}\right)} < \pi.$ 4. $\lim_n e^{\tan\left(\frac{n\pi^2+(-1)^n e^2}{7n}\right)}$ does not exist. निम्न में से कौन सा वक्तव्य सही है? 1. $\limsup_n \; e^{\cos\left(\frac{n\pi+(-1)^n 2e}{2n}\right)} > 1.$ 2. $\lim_n e^{\log_e\left(\frac{n\pi^2+(-1)^n e^2}{7n}\right)}$ अस्तित्व में नहीं है। 3. $\liminf_n \; e^{\sin\left(\frac{n\pi+(-1)^n 2e}{2n}\right)} < \pi.$ 4. $\lim_n e^{\tan\left(\frac{n\pi^2+(-1)^n e^2}{7n}\right)}$ अस्तित्व में नहीं है। A1 : 1 1	3.0	0.75

		A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4		
Objective Question				
25	704025	How many real roots does the polynomial $x^3+3x-2023$ have? 1. 0 2. 1 3. 2 4. 3 बहुपद $x^3+3x-2023$ के कितने वास्तविक मूल हैं ? 1. 0 2. 1 3. 2 4. 3 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75
Objective Question				
26	704026	Which one of the following functions is *uniformly continuous* on the interval (0,1)? 1. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 2. $f(x)=e^{-1/x^2}$ 3. $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ 4. $f(x)=\cos x\cos\frac{\pi}{x}$	3.0	0.75

अंतराल (0,1) पर निम्न फलनों में से कौन सा एक-समानतः संतत है?

1. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

2. $f(x) = e^{-1/x^2}$

3. $f(x) = e^x \cos\frac{1}{x}$

4. $f(x) = \cos x \cos\frac{\pi}{x}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

27	704027	Let $l \geq 1$ be a positive integer. What is the dimension of the $\mathbb{R}$-vector space of all polynomials in two variables over $\mathbb{R}$ having a total degree of at most l?	3.0	0.75

Let $l \geq 1$ be a positive integer. What is the dimension of the $\mathbb{R}$-vector space of all polynomials in two variables over $\mathbb{R}$ having a total degree of at most l?

1. $l + 1$

2. $l(l - 1)$

3. $l(l + 1)/2$

4. $(l + 1)(l + 2)/2$

मानें कि $l \geq 1$ एक धनात्मक पूर्णांक है। $\mathbb{R}$ पर कुल अधिकतम l घात (degree) वाले सभी द्विचर बहुपदों की $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि की विमा क्या है?

1. $l + 1$

2. $l(l - 1)$

3. $l(l + 1)/2$

4. $(l + 1)(l + 2)/2$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

28	704028		3.0	0.75

Let T be a linear operator on $\mathbb{R}^3$. Let $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ denote its characteristic polynomial. Consider the following statements.

(a). Suppose T is non-zero and 0 is an eigen value of T. If we write $f(X) = Xg(X)$ in $\mathbb{R}[X]$, then the linear operator $g(T)$ is zero.

(b). Suppose 0 is an eigenvalue of T with at least two linearly independent eigen vectors. If we write $f(X) = Xg(X)$ in $\mathbb{R}[X]$, then the linear operator $g(T)$ is zero.

Which of the following is true?

1. Both (a) and (b) are true.
2. Both (a) and (b) are false.
3. (a) is true and (b) is false.
4. (a) is false and (b) is true.

मानें कि $\mathbb{R}^3$ पर T रैखिक संकारक (linear operator) है। मानें कि $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ इसका अभिलक्षणिक बहुपद है। निम्न वक्तव्यों पर विचार करें

(a). माने कि T शून्येतर है तथा T का एक अभिलक्षणिक मान (eigen value) 0 है। यदि हम $\mathbb{R}[X]$ में $f(X) = Xg(X)$ लिखें, तो रैखिक संकारक $g(T)$ शून्य है।

(b). मानें कि T का एक अभिलक्षणिक मान 0 है, जिसके कम से कम दो रैखितः स्वतंत्र (linearly independent) अभिलक्षणिक सदिश हैं। यदि हम $\mathbb{R}[X]$ में $f(X) = Xg(X)$ लिखें तो रैखिक संकारक $g(T)$ शून्य है।

निम्न में से कौन सा सत्य है?

1. (a) तथा (b) दोनों सत्य है।
2. (a) तथा (b) दोनों असत्य है।
3. (a) सत्य है तथा (b) असत्य है।
4. (a) असत्य है तथा (b) सत्य है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

29	704029		3.0	0.75

Let A be a 3×3 matrix with real entries. Which of the following assertions is **FALSE**?

1. A must have a real eigenvalue.
2. If the determinant of A is 0, then 0 is an eigenvalue of A.
3. If the determinant of A is negative and 3 is an eigenvalue of A, then A must have three real eigenvalues.
4. If the determinant of A is positive and 3 is an eigenvalue of A, then A must have three real eigenvalues.

A को वास्तविक प्रविष्टियों वाली 3×3 आव्यूह मानें। निम्न में से कौन सा वक्तव्य **असत्य** है ?

1. A का कोई वास्तविक अभिलक्षणिक मान होना ही चाहिए।
2. यदि A का सारणिक 0 है, तब A का एक अभिलक्षणिक मान 0 है।
3. यदि A का सारणिक ऋणात्मक है तथा A का एक अभिलक्षणिक मान 3 है, तब A के तीन वास्तविक अभिलक्षणिक मान होंगें ही।
4. यदि A का सारणिक धनात्मक है, तथा A का एक अभिलक्षणिक मान 3 है, तब A के तीन वास्तविक अभिलक्षणिक मान होंगें ही।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

30	704030	Let A be a 3×3 real matrix whose characteristic polynomial $p(T)$ is divisible by T^2. Which of the following statements is true? 1. The eigenspace of A for the eigenvalue 0 is two-dimensional. 2. All the eigenvalues of A are real. 3. $A^3 = 0$. 4. A is diagonalizable. मानें कि A एक 3×3 वास्तविक प्रविष्टियों वाला आव्यूह है जिसका अभिलक्षणिक बहुपद $p(T)$ है जो T^2 से भाज्य है। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सत्य है? 1. अभिलक्षणिक मान 0 के लिए A की अभिलक्षणिक समष्टि द्वि-विमीय है। 2. A के सभी अभिलक्षणिक मान वास्तविक हैं। 3. $A^3 = 0$. 4. A विकर्णनीय (diagonalizable) है। A1 : 1 1	3.0	0.75

		A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4		

Objective Question

31	704031	Let $x = (x_1, \cdots, x_n)$ and $y = (y_1, \cdots, y_n)$ denote vectors in $\mathbb{R}^n$ for a fixed $n \geq 2$. Which of the following defines an inner product on $\mathbb{R}^n$? 1. $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, y_j$ 2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i^2 + y_j^2)$ 3. $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} j^3\, x_j y_j$ 4. $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_{n-j+1}$ मानें कि किसी निश्चित $n \geq 2$ के लिए $\mathbb{R}^n$ में $x = (x_1, \cdots, x_n)$ तथा $y = (y_1, \cdots, y_n)$ दो सदिशों को निरूपित करते हैं। निम्न में से कौन सा $\mathbb{R}^n$ पर आंतरिक गुणन (inner product) परिभाषित करता है? 1. $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, y_j$ 2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i^2 + y_j^2)$ 3. $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} j^3\, x_j y_j$ 4. $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_{n-j+1}$ A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75

Objective Question

32	704032		3.0	0.75

Consider the quadratic form $Q(x, y, z)$ associated to the matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Let

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid Q(a, b, c) = 0 \right\}.$$

Which of the following statements is FALSE?

1. The intersection of S with the xy-plane is a line.
2. The intersection of S with the xz-plane is an ellipse.
3. S is the union of two planes.
4. Q is a degenerate quadratic form.

निम्न आव्यूह से सहचारी द्विघात रूप (quadratic form) $Q(x, y, z)$ पर विचार करें

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

मानें कि

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid Q(a, b, c) = 0 \right\}.$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन सा असत्य है?

1. S का xy – समतल के साथ सर्वनिष्ठ एक रेखा है।
2. S का xz- समतल के साथ सर्वनिष्ठ एक दीर्घवृत है।
3. S दो समतलों का सम्मिलन है।
4. Q एक अपभ्रष्ट द्विघात रूप है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

33	704033	Let $f(z) = \exp(z + \frac{1}{z}), z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. The residue of f at $z = 0$ is 1. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!}$ 2. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)}$ 3. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)!}$ 4. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l^2+l)!}$	3.0	0.75

मानें कि $f(z) = \exp(z + \frac{1}{z}), z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. तब f का $z = 0$ पर अवशेष है

1. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!}$
2. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)}$
3. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)!}$
4. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l^2+l)!}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

34 | 704034 | 3.0 | 0.75

Let f be an entire function that satisfies $|f(z)| \leq e^y$ for all $z = x + iy \in \mathbb{C}$, where $x, y \in \mathbb{R}$. Which of the following statements is true?

1. $f(z) = ce^{-iz}$ for some $c \in \mathbb{C}$ with $|c| \leq 1$.
2. $f(z) = ce^{iz}$ for some $c \in \mathbb{C}$ with $|c| \leq 1$.
3. $f(z) = e^{-ciz}$ for some $c \in \mathbb{C}$ with $|c| \leq 1$.
4. $f(z) = e^{ciz}$ for some $c \in \mathbb{C}$ with $|c| \leq 1$.

मानें कि f ऐसा सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है जो $|f(z)| \leq e^y$ को सभी $z = x + iy \in \mathbb{C}$, जहां $x, y \in \mathbb{R}$, के लिए संतुष्ट करता है। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा वक्तव्य सत्य है?

1. $f(z) = ce^{-iz}$ कुछ $c \in \mathbb{C}$ के लिए जहां $|c| \leq 1$.
2. $f(z) = ce^{iz}$ कुछ $c \in \mathbb{C}$ के लिए जहां $|c| \leq 1$.
3. $f(z) = e^{-ciz}$ कुछ $c \in$ के लिए जहां $|c| \leq 1$.
4. $f(z) = e^{ciz}$ कुछ $c \in$ के लिए जहां $|c| \leq 1$.

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

35 | 704035 | 3.0 | 0.75

Consider the function f defined by $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ for $z \in \mathbb{C}$ such that $1 - z - z^2 \neq 0$.

Which of the following statements is true?

1. f is an entire function.
2. f has a simple pole at $z = 0$.
3. f has a Taylor series expansion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, where coefficients a_n are recursively defined as follows: $a_0 = 1, a_1 = 0$ and $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ for $n \geq 0$.
4. f has a Taylor series expansion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, where coefficients a_n are recursively defined as follows: $a_0 = 1, a_1 = 1$ and $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ for $n \geq 0$.

ऐसे $z \in \mathbb{C}$ कि $1 - z - z^2 \neq 0$ हो, के लिए $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार करें। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सत्य है?

1. f सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है।
2. f का $z = 0$ पर एकघात अनंतक (simple pole) है।
3. f का टेलर श्रेणी विस्तार $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ है, जहां गुणांकों a_n, $n \geq 0$ को $a_0 = 1, a_1 = 0$ तथा $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ की तरह पुनरावर्ती रूप में परिभाषित किया है।
4. f का टेलर श्रेणी विस्तार $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ है, जहां गुणांकों a_n, $n \geq 0$ को $a_0 = 1, a_1 = 1$ तथा $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ की तरह पुनरावर्ती रूप में परिभाषित किया है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

36	704036	Let C be the positively oriented circle in the complex plane of radius 3 centered at the origin. What is the value of the integral $$\int_C \frac{dz}{z^2(e^z - e^{-z})}?$$ 1. $i\pi/12$ 2. $-i\pi/12$ 3. $i\pi/6$ 4. $-i\pi/6$	3.0	0.75

मानें कि सम्मिश्र समतल में, C एक धनात्मक रूप से अभिविन्यस्त वृत्त है जो मूल बिंदु पर केंद्रित एवं त्रिज्या 3 का है। तब समाकलन

$$\int_C \frac{dz}{z^2(e^z - e^{-z})}$$

का क्या मान है?

1. $i\pi/12$
2. $-i\pi/12$
3. $i\pi/6$
4. $-i\pi/6$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

37	704037	Which of the following equations can occur as the class equation of a group of order 10? 1. $10 = 1 + 1 + \cdots + 1$ (10-times). 2. $10 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$. 3. $10 = 1 + 1 + 1 + 2 + 5$. 4. $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. निम्न में से कौन सी समीकरण कोटि (order) 10 के किसी समूह का क्लास समीकरण (class equation) हो सकती है? 1. $10 = 1 + 1 + \cdots + 1$ (10-बार). 2. $10 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$. 3. $10 = 1 + 1 + 1 + 2 + 5$. 4. $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75

Objective Question

38	704038		3.0	0.75

		The number of solutions of the equation $x^2 = 1$ in the ring $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$ is 1. 0 2. 2 3. 4 4. 8 वलय $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$ में, समीकरण $x^2 = 1$ के हलों की संख्या है 1. 0 2. 2 3. 4 4. 8 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4		

Objective Question

39	704039	Let p be a prime number. Let G be a group such that for each $g \in G$ there exists an $n \in \mathbb{N}$ such that $g^{p^n} = 1$. Which of the following statements is **FALSE**? 1. If $\|G\| = p^6$, then G has a subgroup of index p^2. 2. If $\|G\| = p^6$, then G has at least five normal subgroups. 3. Center of G can be infinite. 4. There exists G with $\|G\| = p^6$ such that G has exactly six normal subgroups. मानें कि p अभाज्य संख्या है। G को ऐसा समूह मानें कि प्रत्येक $g \in G$ के लिए एक ऐसा $n \in \mathbb{N}$ है कि $g^{p^n} = 1$ है। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा **असत्य** है? 1. यदि $\|G\| = p^6$, तब G का p^2 सूचकांक वाला उपसमूह है। 2. यदि $\|G\| = p^6$, तब G के कम से कम 5 प्रसामान्य उपसमूह हैं। 3. G का केन्द्र अनंत हो सकता है । 4. ऐसा G है जिसके लिए $\|G\| = p^6$, इस प्रकार कि G के यथायथ 6 प्रसामान्य उपसमूह हैं। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3	3.0	0.75

		A4: 4 4		

Objective Question

40	704040	Consider $\mathbb{R}$ with the usual topology. Which of the following assertions is correct? 1. A finite set containing 33 elements has at least 3 different Hausdorff topologies. 2. Let X be a non-empty finite set with a Hausdorff topology. Consider $X \times X$ with the product topology. Then, every function $f: X \times X \to \mathbb{R}$ is continuous. 3. Let X be a discrete topological space having infinitely many elements. Let $f: \mathbb{R} \to X$ be a continuous function and $g: X \to \mathbb{R}$ be any non-constant function. Then the range of $g \circ f$ contains at least 2 elements. 4. If a non-empty metric space X has a finite dense subset, then there exists a discontinuous function $f: X \to \mathbb{R}$. साधारण संस्थिति के साथ $\mathbb{R}$ पर विचार कीजिए। निम्न में कौन सा वक्तव्य सही है? 1. 33 अवयवों वाले एक परिमित समुच्चय की कम से कम 3 भिन्न हाउज्डॉर्फ सांस्थितियां (topologies) हैं। 2. X को हाउज्डॉर्फ संस्थिति वाला अरिक्त परिमित समुच्चय माने। $X \times X$ पर गुणन संस्थिति के साथ विचार करें। तब हर फलन $f: X \times X \to \mathbb{R}$ संतत है। 3. मानें कि X एक अनंत अवयवों वाला वियुक्त संस्थितिक समष्टि है। मानें कि $f: \mathbb{R} \to X$ संतत फलन तथा $g: X \to \mathbb{R}$ कोई भी अनियत फलन है। तब $g \circ f$ की रेंज (range) में कम से कम 2 अवयव हैं। 4. यदि किसी अरिक्त दूरीक समष्टि X में परिमित सघन उपसमूह है, तब एक असंतत फलन $f: X \to \mathbb{R}$ का अस्तित्व है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75

Objective Question

41	704041	Let $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz function. Consider the initial value problem $$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$ for $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Suppose that $J(t_0, x_0)$ represents the maximal interval of existence for the initial value problem. Which of the following statements is true? 1. $J(t_0, x_0) = \mathbb{R}$. 2. $J(t_0, x_0)$ is an open set. 3. $J(t_0, x_0)$ is a closed set. 4. $J(t_0, x_0)$ could be an empty set.	3.0	0.75

माने कि $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ स्थानीयत: लिपशिट्ज फलन है। निम्न प्रारंभिक मान समस्या पर विचार करें

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

जो $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ के लिए है। मानें कि $J(t_0, x_0)$ प्रारंभिक मान समस्या के लिए अधिकतम अस्तित्व अंतराल है। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सत्य है?

1. $J(t_0, x_0) = \mathbb{R}$.
2. $J(t_0, x_0)$ एक विवृत्त समुच्चय है।
3. $J(t_0, x_0)$ एक संवृत्त समुच्चय है।
4. $J(t_0, x_0)$ रिक्त समुच्चय हो सकता है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

42	704042	Suppose $x(t)$ is the solution of the following initial value problem in $\mathbb{R}^2$	3.0	0.75

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad \text{where} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Which of the following statements is true?

1. $x(t)$ is a bounded solution for some $x_0 \neq 0$.
2. $e^{-6t}|x(t)| \to 0$ as $t \to \infty$, for all $x_0 \neq 0$.
3. $e^{-t}|x(t)| \to \infty$ as $t \to \infty$, for all $x_0 \neq 0$.
4. $e^{-10t}|x(t)| \to 0$ as $t \to \infty$, for all $x_0 \neq 0$.

मानें कि $\mathbb{R}^2$ में $x(t)$ निम्न प्रारंभिक मान समस्या का हल है

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad \text{जहां} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

निम्न में से कौन सा वक्तव्य सत्य है ?

1. कुछ $x_0 \neq 0$ के लिए, $x(t)$ परिबद्ध हल है
2. सब $x_0 \neq 0$ के लिए, $e^{-6t}|x(t)| \to 0$ जैसे-जैसे $t \to \infty$
3. सब $x_0 \neq 0$ के लिए, $e^{-t}|x(t)| \to \infty$ जैसे-जैसे $t \to \infty$
4. सब $x_0 \neq 0$ के लिए, $e^{-10t}|x(t)| \to 0$ जैसे-जैसे $t \to \infty$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

		3 A4: 4 4		

Objective Question

43	704043	Let $u(x,y)$ be the solution of the Cauchy problem $$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) &= x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$ Which of the following is the value of $u(2,3)$? 1. 2 2. 3 3. 1/2 4. 1/3 मानें कि $u(x,y)$ निम्न कौशी समस्या का हल है $$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) &= x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$ निम्नलिखित में से कौन $u(2,3)$ का मान है? 1. 2 2. 3 3. 1/2 4. 1/3 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75

Objective Question

44	704044	Let $u(x,t)$ be the solution of $$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 &= u(2,t), & \forall\, t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x), & 0 \le x \le 2, \\ u_t(x,0) &= 0, & 0 \le x \le 2. \end{aligned}$$ Which of the following is true? 1. $u(1,1) = -1.$ 2. $u(1/2,1) = 0.$ 3. $u(1/2,2) = 1.$ 4. $u_t(1/2,1/2) = \pi.$	3.0	0.75

मानें कि $u(x,t)$ निम्न का हल है:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 &= u(2,t), & \forall\, t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x), & 0 \le x \le 2, \\ u_t(x,0) &= 0, & 0 \le x \le 2. \end{aligned}$$

निम्न में से कौन सा सत्य है?

1. $u(1,1) = -1$.
2. $u(1/2,1) = 0$.
3. $u(1/2,2) = 1$.
4. $u_t(1/2,1/2) = \pi$.

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

45	704045	Which of the following values of a, b, c and d will produce a quadrature formula $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$ that has degree of precision 3? 1. $a = 1, b = 1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$ 2. $a = -1, b = 1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$ 3. $a = 1, b = 1, c = -\frac{1}{3}, d = \frac{1}{3}$ 4. $a = 1, b = -1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$	3.0	0.75

a, b, c तथा d के निम्नलिखित में से कौन से मान निम्न क्षेत्रकलन सूत्र देंगे

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

जिसकी परिशुद्धता की कोटि 3 है?

1. $a = 1, b = 1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$

2. $a = -1, b = 1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$

3. $a = 1, b = 1, c = -\frac{1}{3}, d = \frac{1}{3}$

4. $a = 1, b = -1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

46	704046	Consider the variational problem (P)	3.0	0.75

Consider the variational problem (P)

$$J(y(x)) = \int_0^1 [(y')^2 - y|y|\,y' + xy]\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Which of the following statements is correct?

1. (P) has no stationary function (extremal).
2. $y \equiv 0$ is the only stationary function (extremal) for (P).
3. (P) has a unique stationary function (extremal) y not identically equal to 0.
4. (P) has infinitely many stationary functions (extremal).

निम्न विचरण समस्या (P) पर विचार करें

$$J(y(x)) = \int_0^1 [(y')^2 - y|y|\,y' + xy]\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सही है ?

1. (P) का कोई स्तब्ध फलन (चरम) नहीं है।
2. (P) के लिए $y \equiv 0$ एक मात्र स्तब्ध फलन (चरम) है।
3. (P) के लिए एक अद्वितीय स्तब्ध फलन (चरम) y है जो 0 के सर्वथासम नहीं है।
4. (P) के अनंततः बहु स्तब्ध फलन (चरम) हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

		A3 : 3 3 A4 : 4 4		

Objective Question

47	704047	For the unknown $y: [0,1] \to \mathbb{R}$, consider the following two-point boundary value problem: $$\begin{cases} y''(x) + 2y(x) & = 0 \quad \text{for } x \in (0,1), \\ y(0) & = y(1) = 0. \end{cases}$$ It is given that the above boundary value problem corresponds to the following integral equation: $$y(x) = 2\int_0^1 K(x,t)y(t)\,dt \qquad \text{for } x \in [0,1].$$ Which of the following is the kernel $K(x,t)$? 1. $K(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & \text{for } t < x \\ x(1-t) & \text{for } t > x \end{cases}$ 2. $K(x,t) = \begin{cases} t^2(1-x) & \text{for } t < x \\ x^2(1-t) & \text{for } t > x \end{cases}$ 3. $K(x,t) = \begin{cases} \sqrt{t}\,(1-x) & \text{for } t < x \\ \sqrt{x}\,(1-t) & \text{for } t > x \end{cases}$ 4. $K(x,t) = \begin{cases} \sqrt{t^3}\,(1-x) & \text{for } t < x \\ \sqrt{x^3}\,(1-t) & \text{for } t > x \end{cases}$ अज्ञात $y: [0,1] \to \mathbb{R}$ के लिए, निम्न द्वि-बिंदु सीमा मान समस्या पर विचार करें $$\begin{cases} y''(x) + 2y(x) & = 0 \quad \text{for } x \in (0,1), \\ y(0) & = y(1) = 0. \end{cases}$$ यह दिया गया है कि उपर दी गई सीमा मान समस्या निम्न समाकल समीकरण के संदर्भ में है $$y(x) = 2\int_0^1 K(x,t)y(t)\,dt \qquad x \in [0,1] \text{ के लिए}$$ निम्न में कौन सा अष्टि $K(x,t)$ है? 1. $K(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & t < x \text{ के लिए} \\ x(1-t) & t > x \text{ के लिए} \end{cases}$ 2. $K(x,t) = \begin{cases} t^2(1-x) & t < x \text{ के लिए} \\ x^2(1-t) & t > x \text{ के लिए} \end{cases}$ 3. $K(x,t) = \begin{cases} \sqrt{t}\,(1-x) & t < x \text{ के लिए} \\ \sqrt{x}\,(1-t) & t > x \text{ के लिए} \end{cases}$ 4. $K(x,t) = \begin{cases} \sqrt{t^3}\,(1-x) & t < x \text{ के लिए} \\ \sqrt{x^3}\,(1-t) & t > x \text{ के लिए} \end{cases}$ A1 : 1 1	3.0	0.75

		A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		

Objective Question

48	704048	Consider the constants a and b such that the following generalized coordinate transformation from (p, q) to (P, Q) is canonical $$Q = pq^{(a+1)}, \quad P = q^b.$$ What are the values of a and b? 1. $a = -1, b = 0$ 2. $a = -1, \ b = 1$ 3. $a = 1, \ b = 0$ 4. $a = 1, \ b = -1$ नियतांकों a तथा b पर इस प्रकार विचार कीजिए कि (p, q) से (P, Q) पर निम्न प्रसामान्यीकृत निर्देशांक रूपांतरण विहित है $$Q = pq^{(a+1)}, \quad P = q^b.$$ a तथा b के मान क्या हैं? 1. $a = -1, b = 0$ 2. $a = -1, \ b = 1$ 3. $a = 1, \ b = 0$ 4. $a = 1, \ b = -1$ A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	3.0	0.75

Objective Question

49	704049	If $f(x)$ is a probability density on the real line, then which of the following is NOT a valid probability density? 1. $f(x+1)$ 2. $f(2x)$ 3. $2f(2x-1)$ 4. $3x^2 f(x^3)$	3.0	0.75

यदि वास्तविक रेखा पर $f(x)$ कोई प्रायिकता घनत्व है तो निम्न में से कौन सा वैध प्रायिकता घनत्व **नहीं** है?

1. $f(x+1)$
2. $f(2x)$
3. $2f(2x-1)$
4. $3x^2 f(x^3)$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

50	704050	Which of the following is a valid cumulative distribution function?	3.0	0.75

Which of the following is a valid cumulative distribution function?

1. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{if } x < 0, \\ \frac{2+x^2}{3+x^2} & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$
2. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{if } x < 0, \\ \frac{2+x^2}{3+2x^2} & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$
3. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{if } x < 0, \\ \frac{2\cos(x)+x^2}{4+x^2} & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$
4. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{if } x < 0, \\ \frac{1+x^2}{4+x^2} & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$

निम्न में से कौन सा फलन एक वैध संचयी बंटन है?

1. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{यदि } x < 0, \\ \frac{2+x^2}{3+x^2} & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$
2. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{यदि } x < 0, \\ \frac{2+x^2}{3+2x^2} & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$
3. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{यदि } x < 0, \\ \frac{2\cos(x)+x^2}{4+x^2} & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$
4. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & \text{यदि } x < 0, \\ \frac{1+x^2}{4+x^2} & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

		3 A4: 4 4		
Objective Question				
51	704051	Let $\{\epsilon_n : n \geq 1\}$ represent the results of independent rolls of a dice with probability of the face i turning up being $p_i > 0$ for $i = 1,2,\ldots,6$ and $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$. Let $\{X_n : n \geq 0\}$ be the Markov chain on the state space $\{1,2,\ldots,6\}$ where $X_n = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n+1}\}$. Then, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4 \| X_0 = 3)$ equals 1. p_4 2. 1 3. $1 - p_3$ 4. 0 मानें कि $\{\epsilon_n : n \geq 1\}$, पासे को स्वतंत्र रूप से फेंके जाने पर, सतह i के ऊपर आने की प्रायिकता $p_i > 0$ होने पर जहां $i = 1,2,\ldots,6$ तथा $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$ है, मिलने वाला परिणाम बताता है। मानें कि $\{X_n : n \geq 0\}$ अवस्था समष्टि $\{1,2,\ldots,6\}$ पर मार्कोव श्रृंखला है जहां $X_n = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n+1}\}$ है, तब $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4 \| X_0 = 3)$ निम्न के बराबर है 1. p_4 2. 1 3. $1 - p_3$ 4. 0 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75
Objective Question				
52	704052	Let X_1, X_2, X_3 and X_4 be independent and identically distributed $Bernoulli(\frac{1}{3})$ random variables. Let $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ and $X_{(4)}$ denote the corresponding order statistics. Which of the following is true? 1. $X_{(1)}$ and $X_{(4)}$ are independent. 2. Expectation of $X_{(2)}$ is $\frac{1}{2}$. 3. Variance of $X_{(2)}$ is $\frac{8}{81}$. 4. $X_{(4)}$ is a degenerate random variable.	3.0	0.75

		मानें कि X_1, X_2, X_3 तथा X_4 स्वतंत्र तथा सर्वथा समबंटित बर्नूली($\frac{1}{3}$) यादृच्छिक चर हैं। मानें कि $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ तथा $X_{(4)}$ तदनुसार संगत क्रम सांख्यिकी दर्शाते हैं। निम्न में से कौन सा सत्य है? 1. $X_{(1)}$ तथा $X_{(4)}$ स्वतंत्र हैं। 2. $X_{(2)}$ की प्रत्याशा $\frac{1}{2}$ है। 3. $X_{(2)}$ का प्रसरण $\frac{8}{81}$ है। 4. $X_{(4)}$ एक अपभ्रष्ट यादृच्छिक चर है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4		
Objective Question				
53	704053	Consider the random sample {3,6,9} of size 3 from a normal distribution with mean $\mu \in (-\infty, 5]$ and variance 1. Then the maximum likelihood estimate of μ is 1. 6 2. 5 3. 3 4. 9 प्रसामान्य बंटन में से माध्य $\mu \in (-\infty, 5]$ तथा प्रसरण 1 वाले आकार 3 के यादृच्छिक प्रतिदर्श {3,6,9} पर विचार करें। तब μ का अधिकतम संभाविता आकलन (maximum likelihood estimate) है 1. 6 2. 5 3. 3 4. 9 A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75
Objective Question				
54	704054		3.0	0.75

मानें कि X, λ माध्य वाला प्वासों यादृच्छिक चर है। निम्न में से कौन सा प्राचलिक फलन आकलनीय नहीं है?

1. λ^{-1}
2. λ
3. λ^2
4. $e^{-\lambda}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

55	704055	Suppose $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are independently and identically distributed $N(\theta, 1)$ random variables, for $\theta \in \mathbb{R}$. Suppose $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ denotes the sample mean and let $t_{0.975,n-1}$ denote the 0.975-quantile of a Student's-t distribution with $n-1$ degrees of freedom. Which of the following statements is true for the following interval $$\bar{X} \pm t_{.975,n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}?$$ 1. The interval is a confidence interval for θ with confidence level of exactly 0.95. 2. The interval is a confidence interval for θ with confidence level being less than 0.95. 3. The interval is a confidence interval for θ with confidence level being more than 0.95. 4. The interval is not a confidence interval. मानें कि $\theta \in \mathbb{R}$ के लिए, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ स्वतंत्र रूप से तथा सर्वथा समबंटित $N(\theta, 1)$ यादृच्छिक चर हैं। मानें कि $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ प्रतिदर्श का माध्य दर्शाता है तथा $t_{0.975,n-1}$ स्टूडेंट-t परीक्षण का 0.975 विभाजक दर्शाता है जिसकी $n-1$ स्वातंत्र्य कोटि हैं। निम्न अंतराल के लिए दिये वक्तव्यों में से कौन सा सही है $$\bar{X} \pm t_{.975,n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} ?$$ 1. यह अंतराल यथायथ 0.95 विश्वास्यता स्तर के साथ θ के लिए विश्वास्यता अंतराल है। 2. यह अंतराल θ का 0.95 से कम विश्वास्यता स्तर वाला विश्वास्यता अंतराल है। 3. यह अंतराल θ का 0.95 से अधिक विश्वास्यता स्तर वाला विश्वास्यता अंतराल है। 4. यह अंतराल विश्वास्यता अंतराल नहीं है।	3.0	0.75

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		

Objective Question

56	704056	Let $X_1, \dots, X_7$ and $Y_1, \dots, Y_9$ be two random samples drawn independently from two populations with continuous CDFs F and G respectively. Consider the Wald-Wolfowitz run test in the context of the following two sample testing problems: $H_0: F(x) = G(x)\ \forall\ x$ vs. $H_1: F(x) \neq G(x)$ for some x. If the random variable R denotes the total number of runs in the combined ordered arrangement of the two given samples, then which of the following is true? 1. $P_{H_0}(R=6) = \frac{28}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{28}{143}$. 2. $P_{H_0}(R=6) = \frac{21}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{15}{286}$. 3. $P_{H_0}(R=6) = \frac{21}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{28}{143}$. 4. $P_{H_0}(R=6) = \frac{21}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{15}{286}$. मानें कि $X_1, \dots, X_7$ तथा $Y_1, \dots, Y_9$ क्रमश: संतत CDFs वाली दो समष्टियां F तथा G से स्वतंत्र रूप से निकाले गए दो याद्दच्छिक प्रतिदर्श हैं। निम्न दो प्रतिदर्श परीक्षण समस्या के संदर्भ में वाल्ड-वुल्फोवित्स रन परीक्षण पर विचार करें : $H_0: F(x) = G(x)\ \forall\ x$ vs. $H_1: F(x) \neq G(x)$, किसी x के लिए। यदि याद्दच्छिक चर R दिये गये दो प्रतिदर्शों के संयुक्त क्रमिक विन्यास के कुल रन (runs) की संख्या हो तो निम्न में से कौन सा सत्य है? 1. $P_{H_0}(R=6) = \frac{28}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{28}{143}$. 2. $P_{H_0}(R=6) = \frac{21}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{15}{286}$. 3. $P_{H_0}(R=6) = \frac{21}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{28}{143}$. 4. $P_{H_0}(R=6) = \frac{21}{286}, P_{H_0}(R=9) = \frac{15}{286}$. A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3	3.0	0.75

		3 A4: 4 4		

Objective Question

57	704057	Consider the simple linear regression model $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$, for $i = 1, \dots, n$; where $E(\epsilon_i) = 0, Cov(\epsilon_i, \epsilon_k) = 0$ if $i \neq k$ and $Var(\epsilon_i) = x_i^2\sigma^2$. The best linear unbiased estimator of β is: 1. $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 2. $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ 3. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}$ 4. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i x_i}{x_i^2}$ $i = 1, \dots, n$ के लिए सरल रैखिक समाश्रयण मॉडल $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$ पर विचार करें, जहां $E(\epsilon_i) = 0, Cov(\epsilon_i, \epsilon_k) = 0$, यदि $i \neq k$ तथा $Var(\epsilon_i) = x_i^2\sigma^2$ हैं, तो β का सर्वश्रेष्ठ अनभिनत रैखिक आकलन है: 1. $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 2. $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ 3. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}$ 4. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i x_i}{x_i^2}$ A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	3.0	0.75

Objective Question

58	704058		3.0	0.75

Suppose $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ has a multivariate normal $N_4(\mathbf{0}, I_2 \otimes \Sigma)$, where I_2 is the 2×2 identity matrix, $\otimes$ is the Kronecker product, and $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Define

$Z = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ and $Q = ((Q_{ij})) = Z^T Z$. Suppose χ_n^2 denotes a chi-square random variate with n degrees of freedom, and $W_m(n, \Sigma)$ denotes a Wishart distribution of order m with parameters n and Σ. The distribution of $(Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} + Q_{22})$ is

1. $W_1(2,2)$
2. $W_1(1,2)$
3. $W_1(2,1)$
4. $2\,\chi_4^2$

मानें कि $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ का बहुचर प्रसामान्य $N_4(\mathbf{0}, I_2 \otimes \Sigma)$ है, जहां I_2 तत्समक 2×2 आव्यूह है, $\otimes$ क्रोनेकर गुणनफल है, तथा $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है। परिभाषित करें कि $Z = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ तथा $Q = \left((Q_{ij})\right) = Z^T Z$ है। मानें कि χ_n^2 स्वातंत्र्य कोटि n वाला काई-वर्ग याद्दच्छिक विचर, तथा $W_m(n, \Sigma)$ प्राचलों n एवं Σ के साथ m कोटि का विशार्ट बंटन है। $(Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} + Q_{22})$ का बंटन है

1. $W_1(2,2)$
2. $W_1(1,2)$
3. $W_1(2,1)$
4. $2\,\chi_4^2$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

59	704059	Let $X = (X_1, X_2)^T$ follow a bivariate normal distribution with mean vector $(0,0)^T$ and covariance matrix Σ such that $$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$ The mean vector and covariance matrix of $Y = (X_1, 5 - 2X_2)^T$ are 1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 40 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 20 \end{bmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 40 \end{bmatrix}$.	3.0	0.75

मानें कि $X = (X_1, X_2)^T$ द्विचर प्रसामान्य बंटन का पालन करता है जबकि माध्य सदिश $(0,0)^T$ तथा सह प्रसरण आव्यूह Σ इस प्रकार है कि

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

$Y = (X_1, 5 - 2X_2)^T$ के माध्य सदिश तथा सह-प्रसरण आव्यूह हैं

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 40 \end{bmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 20 \end{bmatrix}.$
3. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}.$
4. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 40 \end{bmatrix}.$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

60	704060	Consider the linear programming problem	3.0	0.75

Consider the linear programming problem

$$\text{maximize } x + 3y, \quad \text{subject to } A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le b,$$

where $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ and $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$. Which of the following statements is true?

1. The objective function attains its maximum at $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ in the feasible region.
2. The objective function attains its maximum at $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in the feasible region.
3. The objective function attains its maximum at $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in the feasible region.
4. The objective function does not attain its maximum at $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ in the feasible region.

रैखिक प्रोगामन समरस्या पर विचार करें

$$x + 3y \text{ को अधिकतमीकृत करें यदि } \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b,$$

जहां $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ तथा $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ हैं।

निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सत्य है?

1. उद्देश्य फलन का सुसंगत क्षेत्र में उच्चतम $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ पर मिलता है।
2. उद्देश्य फलन का सुसंगत क्षेत्र में उच्चतम $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ पर मिलता है।
3. उद्देश्य फलन का सुसंगत क्षेत्र में उच्चतम $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ पर मिलता है।
4. उद्देश्य फलन का सुसंगत क्षेत्र में उच्चतम $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ पर नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

61	704061	Let $\{x_n\}$ be a sequence of positive real numbers. If $\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots x_n)$, then which of the following are true? (Here lim sup denotes the limit supremum of a sequence.) 1. If $\limsup\{x_n\} = \ell$ and $\{x_n\}$ is decreasing, then $\limsup\{\sigma_n\} = \ell$. 2. $\limsup\{x_n\} = \ell$ if and only if $\limsup\{\sigma_n\} = \ell$. 3. If $\limsup\left\{n\left(\frac{x_n}{x_{(n+1)}} - 1\right)\right\} < 1$, then $\sum_n x_n$ is convergent. 4. If $\limsup\left\{n\left(\frac{x_n}{x_{(n+1)}} - 1\right)\right\} < 1$, then $\sum_n x_n$ is divergent.	4.75	0.00

मानें कि $\{x_n\}$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रम है।

यदि $\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots x_n)$ तब निम्न में से कौन से सत्य हैं ? (यहां lim sup अनुक्रम के सीमा उच्चक को दर्शाता है)

1. यदि $\lim\sup\{x_n\} = \ell$ है तथा $\{x_n\}$ घट रहा है, तब $\lim\sup\{\sigma_n\} = \ell$ है।

2. $\lim\sup\{x_n\} = \ell$ है यदि और केवल यदि $\lim\sup\{\sigma_n\} = \ell$ है।

3. यदि $\lim\sup\left\{n\left(\frac{x_n}{x_{(n+1)}} - 1\right)\right\} < 1$ है, तब $\sum_n x_n$ अभिसारी है।

4. यदि $\lim\sup\left\{n\left(\frac{x_n}{x_{(n+1)}} - 1\right)\right\} < 1$ है, तब $\sum_n x_n$ अपसारी है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

62	704062	Under which of the following conditions is the sequence $\{x_n\}$ of real numbers convergent?	4.75	0.00

1. The subsequences $\{x_{(2n+1)}\}$, $\{x_{2n}\}$ and $\{x_{3n}\}$ are convergent and have the same limit.

2. The subsequences $\{x_{(2n+1)}\}$, $\{x_{2n}\}$ and $\{x_{3n}\}$ are convergent.

3. The subsequences $\{x_{kn}\}_n$ are convergent for every $k \geq 2$.

4. $\lim_n | x_{(n+1)} - x_n | = 0$.

निम्न में से किन परिस्थितियों में वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी है?

1. उपानुक्रम $\{x_{(2n+1)}\}$, $\{x_{2n}\}$ तथा $\{x_{3n}\}$ अभिसारी हैं तथा उनकी एक ही सीमा है।

2. उपानुक्रम $\{x_{(2n+1)}\}$, $\{x_{2n}\}$ तथा $\{x_{3n}\}$ अभिसारी हैं।

3. हर $k \geq 2$ के लिए उपानुक्रम $\{x_{kn}\}_n$ अभिसारी हैं।

4. $\lim_n | x_{(n+1)} - x_n | = 0$.

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

		3 A4: 4 4		

Multiple Response

63	704063	Which of the following are true?	4.75	0.00

Which of the following are true?

1. For $n \geq 1$, the sequence of functions $f_n: (0,1) \to (0,1)$ defined by $f_n(x) = x^n$ is uniformly convergent.
2. For $n \geq 1$, the sequence of functions $f_n: (0,1) \to (0,1)$ defined by $f_n(x) = \frac{x^n}{\log(n+1)}$ is uniformly convergent.
3. For $n \geq 1$, the sequence of functions $f_n: (0,1) \to (0,1)$ defined by $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ is uniformly convergent.
4. For $n \geq 1$, the sequence of functions $f_n: (0,1) \to (0,1)$ defined by $f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx^n}$ is not uniformly convergent.

निम्न में से कौन से सत्य हैं?

1. $n \geq 1$ के लिए, $f_n(x) = x^n$ द्वारा परिभाषित फलनों $f_n: (0,1) \to (0,1)$ का अनुक्रम एक-समानत: अभिसारी है।
2. $n \geq 1$, के लिए, $f_n(x) = \frac{x^n}{\log(n+1)}$ द्वारा परिभाषित फलनों $f_n: (0,1) \to (0,1)$ का अनुक्रम एक-समानत: अभिसारी है।
3. $n \geq 1$ के लिए, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ द्वारा परिभाषित फलनों $f_n: (0,1) \to (0,1)$ का अनुक्रम एक-समानत: अभिसारी है।
4. $n \geq 1$ के लिए, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx^n}$ द्वारा परिभाषित फलनों $f_n: (0,1) \to (0,1)$ का अनुक्रम एक-समानत: अभिसारी नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

64	704064	Define a function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by	4.75	0.00

Define a function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/x) & \text{when } x \neq 0, \\ 0 & \text{when } x = 0. \end{cases}$$

On which of the following subsets of $\mathbb{R}$, the restriction of f is a continuous function?

1. $[-1,1]$
2. $(0,1)$
3. $\{0\} \cup \{(1/n): n \in \mathbb{N}\}$
4. $\{1/2^n: n \in \mathbb{N}\}$

फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को निम्नवत परिभाषित करें

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/x) & \text{जब } x \neq 0, \\ 0 & \text{जब } x = 0. \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ के निम्न उप-समुच्चयों में से किन पर f का प्रतिबंधन (restriction) संतत फलन है?

1. $[-1,1]$
2. $(0,1)$
3. $\{0\} \cup \{(1/n): n \in \mathbb{N}\}$
4. $\{1/2^n: n \in \mathbb{N}\}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

65	704065	Define $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ by $f(x,y,z,w) = xw - yz$. Which of the following statements are true? 1. f is continuous. 2. if $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4: xy + zw = 0, x^2 + z^2 = 1, y^2 + w^2 = 1\}$, then f is uniformly continuous on U. 3. if $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4: x = y, z = w\}$, then f is uniformly continuous on V. 4. if $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4: 0 \leq x + y + z + w \leq 1\}$, then f is unbounded on W. $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ को $f(x,y,z,w) = xw - yz$ से परिभाषित करें। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं ? 1. f संतत है 2. यदि $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4: xy + zw = 0, x^2 + z^2 = 1, y^2 + w^2 = 1\}$ है, तब U पर f एक-समानतः संतत है। 3. यदि $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4: x = y, z = w\}$ है, तब V पर f एक-समानतः संतत है। 4. यदि $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4: 0 \leq x + y + z + w \leq 1\}$ है, तब W पर f अपरिबद्ध है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	4.75	0.00

Multiple Response

66	704066	Consider the following statements: (a). Let f be a continuous function on $[1,\infty)$ taking non-negative values such that $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converges. Then $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converges. (b). Let f be a function on $[1,\infty)$ taking non-negative values such that $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converges. Then $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. (c). Let f be a continuous, decreasing function on $[1,\infty)$ taking non-negative values such that $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ does not converge. Then $\sum_{n\geq 1} f(n)$ does not converge. Which of the following options are true? 1. (a), (b) and (c) all are true. 2. Both (a) and (b) are false. 3. (c) is true. 4. (b) is true. निम्न वक्तव्यों पर विचार करें: (a). मानें कि फलन f, जो $[1,\infty)$ पर संतत है एवं जिसके ऋणेतर (non-negative) मान हैं, इस प्रकार है कि $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ अभिसारी है। तब $\sum_{n\geq 1} f(n)$ अभिसरण करता है। (b). मानें कि $[1,\infty)$ पर फलन f, जिसके ऋणेतर मान हैं, इस प्रकार है कि $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ अभिसारी है। तब $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ है। (c). मानें कि फलन f, जो $[1,\infty)$ पर संतत ह्रासमान (decreasing) है और जिसके ऋणेतर मान हैं, इस प्रकार है कि $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ अभिसारी नहीं है। तब $\sum_{n\geq 1} f(n)$ अभिसारी नहीं है। निम्न विकल्पों में से कौन से सत्य हैं? 1. (a), (b) तथा (c) सब सत्य हैं। 2. (a) तथा (b) दोनों असत्य हैं। 3. (c) सत्य है। 4. (b) सत्य है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	4.75	0.00
Multiple Response				
67	704067		4.75	0.00

Let μ denote the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$ and μ^* be the associated Lebesgue outer measure. Let A be a non-empty subset of $[0,1]$. Which of the following statements are true?

1. If both interior and closure of A have the same outer measure, then A is Lebesgue measurable.
2. If A is open, then A is Lebesgue measurable and $\mu(A) > 0$.
3. If A is not Lebesgue measurable, then the set of irrationals in A must have positive outer measure.
4. If $\mu^*(A) = 0$, then A has empty interior.

μ को $\mathbb{R}$ पर लेबेग (Lebesgue) माप मानें तथा μ^* को सहचारी लेबेग बाह्य माप। मानें कि $[0,1]$ का एक अरिक्त समुच्चय A है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि A के अंतः (interior) तथा संवरक (closure) दोनों के एक ही बाह्य माप हैं, तो A लेबेग मेय है।
2. यदि A विवृत्त (open) है, तब A लेबेग मेय है तथा $\mu(A) > 0$ है।
3. यदि A लेबेग मेय नहीं है, तब A में अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय का बाह्य माप धनात्मक ही होगा।
4. यदि $\mu^*(A) = 0$, तब A का अंतः रिक्त होगा।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

68	704068	Consider the function $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defined by $$f(x,y) = x^2 - y^3.$$ Which of the following statements are true? 1. There is no continuous real-valued function g defined on any interval of $\mathbb{R}$ containing 0 such that $f(x, g(x)) = 0$. 2. There is exactly one continuous real-valued function g defined on an interval of $\mathbb{R}$ containing 0 such that $f(x, g(x)) = 0$. 3. There is exactly one differentiable real-valued function g defined on an interval of $\mathbb{R}$ containing 0 such that $f(x, g(x)) = 0$. 4. There are two distinct differentiable real-valued functions g on an interval of $\mathbb{R}$ containing 0 such that $f(x, g(x)) = 0$.	4.75	0.00

निम्नत: परिभाषित फलन $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ पर विचार करें

$$f(x,y) = x^2 - y^3.$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\mathbb{R}$ के किसी भी अंतराल, जिसमें 0 हो, पर ऐसा कोई वास्तविक मान वाला संतत फलन g परिभाषित नहीं है जिसके लिए $f(x,g(x)) = 0$ है।
2. $\mathbb{R}$ के किसी अंतराल, जिसमें 0 हो, पर ऐसा केवल एक ही वास्तविक मान वाला संतत फलन g परिभाषित है जिसके लिए $f(x,g(x)) = 0$ है।
3. $\mathbb{R}$ के किसी अंतराल, जिसमें 0 हो, पर ऐसा केवल एक ही वास्तविक मान वाला अवकलनीय फलन g परिभाषित है जिसके लिए $f(x,g(x)) = 0$ है।
4. $\mathbb{R}$ के किसी अंतराल, जिसमें 0 हो, पर दो भिन्न वास्तविक मान वाले अवकलनीय फलन g परिभाषित हैं जिसके लिए $f(x,g(x)) = 0$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

69	704069	(see below)	4.75	0.00

Suppose that $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$ is a C^2 function satisfying

$$f(y) \geq f(x) + \nabla(f)(x)(y-x)$$

for every x, y in $\mathbb{R}^n$. Here ∇ denotes the gradient. Which of the following statements are true?

1. f is constant.
2. f is convex.
3. f is convex and bounded.
4. f is constant if f is bounded.

मानें कि $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2,$ एक C^2 फलन है जो $\mathbb{R}^n$ के सभी x, y के लिए

$$f(y) \geq f(x) + \nabla(f)(x)(y-x)$$

संतुष्ट करता है। यहां ∇ प्रवण (gradient) दर्शाता है।

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. f नियत है।
2. f अवमुखी है।
3. f अवमुखी तथा परिबद्ध है।
4. f नियत है यदि f परिबद्ध है।

A1: 1

1

A2: 2

		2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		

Multiple Response

70	704070	Which of the following statements are true for an arbitrary normed linear space U? 1. Every bounded linear functional from U to $\mathbb{R}$ is continuous. 2. U is isomorphic to its double-dual U^{**}. 3. For every $x \in U$, we have $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|f(x)\|$, where f denotes elements of U^*. 4. The closed unit ball in U is compact. निम्न वक्तव्यों में से कौन से स्वेच्छ (arbitrary) मानकित रैखिक समष्टि U के लिए सत्य है ? 1. U से $\mathbb{R}$ तक, हर परिबद्ध रैखिक फलनक संतत है । 2. U अपने द्विक-द्वैत (double-dual) U^{**} के तुल्याकारी (isomorphic) है। 3. हर $x \in U$ के लिए, $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|f(x)\|$ है, जहां f से आशय U^*के अवयवों से है। 4. U में संवृत (closed) एकक गोलक संहत (compact) है। A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	4.75	0.00

Multiple Response

71	704071	Let V be the vector space of all polynomials in one variable of degree at most 10 with real coefficients. Let W_1 be the subspace of V consisting of polynomials of degree at most 5 and let W_2 be the subspace of V consisting of polynomials such that the sum of their coefficients is 0. Let W be the smallest subspace of V containing both W_1 and W_2. Which of the following statements are true? 1. The dimension of W is at most 10. 2. $W = V$. 3. $W_1 \subset W_2$. 4. The dimension of $W_1 \cap W_2$ is at most 5.	4.75	0.00

मानें कि V वास्तविक गुणांको वाले अधिकतम 10 घात के एक चर के सभी बहुपदों की सदिश समष्टि है । मानें कि W_1 अधिकतम 5 कोटि वाले बहुपदों की V की उपसमष्टि है तथा W_2 बहुपदों वाली V की ऐसी उपसमष्टि हैं कि उनके गुणांकों का योग 0 है। V की सबसे छोटे उपसमष्टि को W मानें जिसमें W_1 तथा W_2 दोनों हैं। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. W की विमा अधिकतम 10 है।
2. $W = V$.
3. $W_1 \subset W_2$.
4. $W_1 \cap W_2$ की विमा अधिकतम 5 है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

72	704072	Let B be a 3×5 matrix with entries from $\mathbb{Q}$. Assume that $\{v \in \mathbb{R}^5 \mid Bv = 0\}$ is a three-dimensional real vector space. Which of the following statements are true?	4.75	0.00

Let B be a 3×5 matrix with entries from $\mathbb{Q}$. Assume that $\{v \in \mathbb{R}^5 \mid Bv = 0\}$ is a three-dimensional real vector space. Which of the following statements are true?

1. $\{v \in \mathbb{Q}^5 \mid Bv = 0\}$ is a three-dimensional vector space over $\mathbb{Q}$.
2. The linear transformation $T: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5$ given by $T(v) = B^t v$ is injective.
3. The column span of B is two-dimensional.
4. The linear transformation $T: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ given by $T(v) = BB^t v$ is injective.

B को $\mathbb{Q}$ की प्रविष्टियों वाला 3×5 आव्यूह मानें। मानें कि $\{v \in \mathbb{R}^5 \mid Bv = 0\}$ एक त्रि-विमीय वास्तविक सदिश समष्टि है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\mathbb{Q}$ पर $\{v \in \mathbb{Q}^5 \mid Bv = 0\}$ एक त्रि-विमीय सदिश समष्टि है।
2. रैखिक रूपांतरण $T: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5$, जो $T(v) = B^t v$ से दिया गया है, एकैकी है।
3. B की स्तंभ विस्तृति द्वि-विमीय है।
4. रैखिक रूपांतरण $T: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, जो $T(v) = BB^t v$ से दिया गया है, एकैकी है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

73	704073		4.75	0.00

Let V be a finite dimensional real vector space and T_1, T_2 be two nilpotent operators on V. Let $W_1 = \{v \in V: T_1(v) = 0\}$ and $W_2 = \{v \in V: T_2(v) = 0\}$. Which of the following statements are **FALSE**?

1. If T_1 and T_2 are similar, then W_1 and W_2 are isomorphic vector spaces.
2. If W_1 and W_2 are isomorphic vector spaces, then T_1 and T_2 have the same minimal polynomial.
3. If $W_1 = W_2 = V$, then T_1 and T_2 are similar.
4. If W_1 and W_2 are isomorphic, then T_1 and T_2 have the same characteristic polynomial.

मानें कि V कोई परिमित विमीय वास्तविक सदिश समष्टि है तथा V पर T_1, T_2 दो शून्यभावी संकारक (nilpotent operators) हैं। मानें कि $W_1 = \{v \in V: T_1(v) = 0\}$ तथा $W_2 = \{v \in V: T_2(v) = 0\}$ हैं। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा असत्य है?

1. यदि T_1 तथा T_2 समरूप (similar) हैं, तो W_1 तथा W_2 तुल्याकारी सदिष्ट समष्टियां हैं।
2. यदि W_1 तथा W_2 तुल्याकारी सदिश समष्टियां हैं, तो T_1 तथा T_2 के एक ही अल्पिष्ठ बहुपद हैं।
3. यदि $W_1 = W_2 = V$ है, तब T_1 तथा T_2 समरूप (similar) हैं ।
4. यदि W_1 तथा W_2 तुल्याकारी हैं, तब T_1 तथा T_2 के एक ही अभिलक्षणिक बहुपद हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

74	704074	Let V be the real vector space of real polynomials in one variable with degree less than or equal to 10 (including the zero polynomial). Let $T: V \to V$ be the linear map defined by $T(p) = p'$, where p' denotes the derivative of p. Which of the following statements are correct? 1. rank $(T) = 10$. 2. determinant $(T) = 0$. 3. trace$(T) = 0$. 4. All the eigenvalues of T are equal to 0.	4.75	0.00

कोटि 10 या उससे कम कोटि (शून्य बहुपद को सम्मिलित करते हुए) वाले वास्तविक एक चरीय बहुपदों की वास्तविक सदिश समष्टि को V मानें। $T: V \to V$ को $T(p) = p'$, द्वारा परिभाषित रेखीय फलनक मानें, जहां p' से आशय p का अवकलन है । निम्न वक्तव्यों में से कौन से सही हैं?

1. rank $(T) = 10$.
2. determinant $(T) = 0$.
3. trace$(T) = 0$.
4. T के सभी अभिलक्षणिक मान 0 के बराबर है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

75	704075	Suppose A is a 5×5 block diagonal real matrix with diagonal blocks	4.75	0.00

Suppose A is a 5×5 block diagonal real matrix with diagonal blocks

$$\begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Which of the following statements are true?

1. The algebraic multiplicity of e in A is 5.
2. A is not diagonalisable.
3. The geometric multiplicity of e in A is 3.
4. The geometric multiplicity of e in A is 2.

मानें कि A एक 5×5 ब्लॉक विकर्ण आव्यूह है जिसके विकर्ण ब्लॉक

$$\begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$ हैं।

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. A में e की बीजगणितीय बहुकता 5 है।
2. A विकर्णनीय नहीं है।
3. A में e की ज्यामितीय बहुकता 3 है।
4. A में e की ज्यामितीय बहुकता 2 है।

A1: 1

1

A2: 2

		2 A3: 3 3 A4: 4 4		

Multiple Response

76	704076	Let $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation satisfying $T^3 - 3T^2 = -2I$, where $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *is* the identity transformation . Which of the following statements are true? 1. $\mathbb{R}^3$ must admit a basis $\mathcal{B}_1$ such that the matrix of T with respect to $\mathcal{B}_1$ is symmetric. 2. $\mathbb{R}^3$ must admit a basis $\mathcal{B}_2$ such that the matrix of T with respect to $\mathcal{B}_2$ is upper triangular. 3. $\mathbb{R}^3$ must contain a non-zero vector v such that $Tv = v$. 4. $\mathbb{R}^3$ must contain two linearly independent vectors v_1, v_2 such that $Tv_1 = v_1$ and $Tv_2 = v_2$. मानें कि $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक रूपांतरण है जो $T^3 - 3T^2 = -2I$ को संतुष्ट करता है, जहां $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ तत्समक रूपांतरण है। निम्न में से कौन से वक्तव्य सत्य हैं? 1. $\mathbb{R}^3$ के लिए ऐसा आधार $\mathcal{B}_1$ होना ही चाहिए कि $\mathcal{B}_1$ के सापेक्ष T का आव्यूह सममित हो। 2. $\mathbb{R}^3$ के लिए एक ऐसा आधार $\mathcal{B}_2$ होना ही चाहिए कि $\mathcal{B}_2$ के सापेक्ष T का आव्यूह ऊपरि त्रिभुजीय हो । 3. $\mathbb{R}^3$ में ऐसा शून्येत्तर सदिश v होना ही चाहिए कि $Tv = v$ हो। 4. $\mathbb{R}^3$ मे दो रैखिकत: स्वतंत्र सदिश v_1, v_2 ऐसे होने ही चाहिए कि $Tv_1 = v_1$ तथा $Tv_2 = v_2$ हों। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	4.75	0.00

Multiple Response

77	704077		4.75	0.00

Let V be an inner product space and let $v_1, v_2, v_3 \in V$ be an orthogonal set of vectors. Which of the following statements are true?

1. The vectors $v_1 + v_2 + 2v_3,\ v_2 + v_3,\ v_2 + 3v_3$ can be extended to a basis of V.
2. The vectors $v_1 + v_2 + 2v_3,\ v_2 + v_3,\ v_2 + 3v_3$ can be extended to an orthogonal basis of V.
3. The vectors $v_1 + v_2 + 2v_3,\ v_2 + v_3,\ 2v_1 + v_2 + 3v_3$ can be extended to a basis of V.
4. The vectors $v_1 + v_2 + 2v_3,\ 2v_1 + v_2 + v_3,\ 2v_1 + v_2 + 3v_3$ can be extended to a basis of V.

मानें कि V आंतर गुणन समष्टि है तथा $v_1, v_2, v_3 \in V$ सदिशों का एक लांबिक समुच्चय है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. सदिश $v_1 + v_2 + 2v_3,\ v_2 + v_3,\ v_2 + 3v_3$ को V के एक आधार तक विस्तारित किया जा सकता है ।
2. सदिश $v_1 + v_2 + 2v_3,\ v_2 + v_3,\ v_2 + 3v_3$ को V के एक लांबिक आधार तक विस्तारित किया जा सकता है ।
3. सदिश $v_1 + v_2 + 2v_3,\ v_2 + v_3,\ 2v_1 + v_2 + 3v_3$ को V के एक आधार तक विस्तारित किया जा सकता है ।
4. सदिश $v_1 + v_2 + 2v_3,\ 2v_1 + v_2 + v_3,\ 2v_1 + v_2 + 3v_3$ को V के एक आधार तक विस्तारित किया जा सकता है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

78	704078	Consider the following quadratic forms over $\mathbb{R}$ (a) $6X^2 - 13XY + 6Y^2$, (b) $X^2 - XY + 2Y^2$, (c) $X^2 - XY - 2Y^2$. Which of the following statements are true? 1. Quadratic forms (a) and (b) are equivalent. 2. Quadratic forms (a) and (c) are equivalent. 3. Quadratic form (b) is positive definite. 4. Quadratic form (c) is positive definite.	4.75	0.00

$\mathbb{R}$ पर निम्न द्विघात रूपों पर विचार करें

(a) $6X^2 - 13XY + 6Y^2$,

(b) $X^2 - XY + 2Y^2$,

(c) $X^2 - XY - 2Y^2$.

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. द्विघात रूप (a) तथा (b) तुल्य है।

2. द्विघात रूप (a) तथा (c) तुल्य है।

3. द्विघात रूप (b) धनात्मक निश्चत है।

4. द्विघात रूप (c) धनात्मक निश्चत है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

79	704079	Let $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: \|z\| < 1\}$ be the open unit disc and C the positively oriented boundary $\{\|z\| = 1\}$. Fix a finite set $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ of distinct points and consider the polynomial $g(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ of degree n. Let f be a holomorphic function in an open neighbourhood of $\overline{\mathbb{D}}$ and define $P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{g(\zeta) - g(z)}{(\zeta - z) g(\zeta)} \, d\zeta.$ Which of the following statements are true? 1. P is a polynomial of degree n 2. P is a polynomial of degree $n - 1$ 3. P is a rational function on $\mathbb{C}$ with poles at $z_1, z_2, \dots, z_n$ 4. $P(z_j) = f(z_j)$ for $j = 1,2, \dots, n$.	4.75	0.00

मानें कि $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ एक विवृत्त एकक डिस्क है तथा C धनात्मकत: अभिविन्यस्त सीमा $\{|z| = 1\}$ है । भिन्न बिंदुओं का परिमित समुच्चय $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ तय करें तथा कोटि n के निम्न बहुपद पर विचार करें

$$g(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

मानें कि $\overline{\mathbb{D}}$ के विविक्त परिवेश में कोई पूर्ण सममितक (holomorphic) f है तथा परिभाषित करें

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{g(\zeta) - g(z)}{(\zeta - z) g(\zeta)} \, d\zeta.$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं ?

1. P एक बहुपद है जिसकी कोटि n है।
2. P एक बहुपद है जिसकी कोटि $n - 1$ है।
3. P एक परिमेय फलन है जो $\mathbb{C}$ पर है तथा उसके ध्रुव $z_1, z_2, \dots, z_n$ हैं।
4. $j = 1,2, \dots, n$ के लिए $P(z_j) = f(z_j)$ हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

80	704080	Let $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$. Consider the following statements.	4.75	0.00

(a). $f: D \to D$ be a holomorphic function. Suppose α, β are distinct complex numbers in D such that $f(\alpha) = \alpha$ and $f(\beta) = \beta$. Then $f(z) = z$ for all $z \in D$.

(b). There does not exist a bijective holomorphic function from D to the set of all complex numbers whose imaginary part is positive.

(c). $f: D \to D$ be a holomorphic function. Suppose $\alpha \in D$ be such that $f(\alpha) = \alpha$ and $f'(\alpha) = 1$. Then $f(z) = z$ for all $z \in D$.

Which of the following options are true?

1. (a), (b) and (c) are all true.
2. (a) is true.
3. Both (a) and (b) are false.
4. Both (a) and (c) are true.

मानें कि $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ है। निम्न वक्तव्यों पर विचार करें

(a). $f: D \to D$ एक वैश्लेषिक फलन (holomorphic function) मानें। α, β को D में भिन्न सम्मिश्र संख्यायें ऐसे मानें कि $f(\alpha) = \alpha$ तथा $f(\beta) = \beta$ है। तब सभी $z \in D$ के लिए $f(z) = z$ है।

(b). D से सभी सम्मिश्र संख्यायें, जिनके अधिकल्पित भाग धनात्मक हैं, के समुच्चय पर कोई एकाकी आच्छादी वैश्लेषिक फलन (holomorphic function) नहीं है ।

(c). $f: D \to D$ को वैश्लेषिक फलन (holomorphic function) मानें। मानें कि $\alpha \in D$ ऐसा है कि $f(\alpha) = \alpha$ तथा $f'(\alpha) = 1$ हैं, तब सब $z \in D$ के लिए $f(z) = z$ होता है।

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. (a), (b) तथा (c) सब सत्य हैं।
2. (a) सत्य है।
3. (a) तथा (b) दोनों असत्य हैं।
4. (a) तथा (c) दोनों सत्य हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

81	704081	Let $f: \{z: \|z\| < 1\} \to \{z: \|z\| \leq 1/2\}$ be a holomorphic function such that $f(0) = 0$. Which of the following statements are true?	4.75	0.00

1. $|f(z)| \leq |z|$ for all z in $\{z: |z| < 1\}$.
2. $|f(z)| \leq \left|\frac{z}{2}\right|$ for all z in $\{z: |z| < 1\}$
3. $|f(z)| \leq 1/2$ for all z in $\{z: |z| < 1\}$
4. It is possible that $f(1/2) = 1/2$.

मानें कि $f: \{z: |z| < 1\} \to \{z: |z| \leq 1/2\}$ एक वैश्लेषिक फलन (holomorphic function) इस प्रकार है कि $f(0) = 0$ है। निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सत्य है?

1. $\{z: |z| < 1\}$ के सब z के लिए $|f(z)| \leq |z|$ है।
2. $\{z: |z| < 1\}$ के सब z के लिए $|f(z)| \leq \left|\frac{z}{2}\right|$ है।
3. $\{z: |z| < 1\}$ के सब z के लिए $|f(z)| \leq 1/2$ है।
4. यह संभव है कि $f(1/2) = 1/2$ हो।

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		

Multiple Response

82	704082	Let $f(z)$ be an entire function on $\mathbb{C}$. Which of the following statements are true? 1. $f(\bar{z})$ is an entire function. 2. $\overline{f(z)}$ is an entire function. 3. $\overline{f(\bar{z})}$ is an entire function. 4. $\overline{f(z)} + f(\bar{z})$ is an entire function. $f(z)$ को $\mathbb{C}$ पर सर्वत्र वैश्लेषिक फलन मानें। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं? 1. $f(\bar{z})$ सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है। 2. $\overline{f(z)}$ सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है। 3. $\overline{f(\bar{z})}$ सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है। 4. $\overline{f(z)} + f(\bar{z})$ सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है। A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	4.75	0.00

Multiple Response

83	704083	Which of the following statements are correct? 1. If G is a group of order 244, then G contains a unique subgroup of order 27. 2. If G is a group of order 1694, then G contains a unique subgroup of order 121. 3. There exists a group of order 154 which contains a unique subgroup of order 7. 4. There exists a group of order 121 which contains two subgroups of order 11.	4.75	0.00

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सही हैं?

1. यदि G कोटि 244 का समूह है, तब G में कोटि 27 का एक अद्वितीय समूह है।

2. यदि G कोटि 1694 का समूह है, तब G में कोटि 121 का एक अद्वितीय समूह है।

3. कोटि 154 का एक ऐसा समूह अस्तित्व में है जिसमें कोटि 7 का एक अद्वितीय समूह है।

4. कोटि 121 का एक ऐसा समूह अस्तित्व में है जिसमें कोटि 11 के दो उपसमूह हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

84	704084	Let G be a group of order 2023. Which of the following statements are true?	4.75	0.00

Let G be a group of order 2023. Which of the following statements are true?

1. G is an Abelian group.
2. G is a cyclic group.
3. G is a simple group.
4. G is not a simple group.

मानें कि G कोटि 2023 का एक समूह है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. G एक आबेली समूह है।
2. G एक चक्रीय समूह है।
3. G एक सरल समूह है।
4. G एक सरल समूह नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

85 704085

Let G_1 and G_2 be two groups and $\varphi: G_1 \to G_2$ be a surjective group homomorphism. Which of the following statements are true?

1. If G_1 is cyclic then G_2 is cyclic.
2. If G_1 is Abelian then G_2 is Abelian.
3. If H is a subgroup of G_1 then $\varphi(H)$ is a subgroup of G_2.
4. If N is a normal subgroup of G_1 then $\varphi(N)$ is a normal subgroup of G_2.

मानें कि G_1 तथा G_2 दो समूह हैं तथा $\varphi: G_1 \to G_2$ एक आच्छादी समूह समकारिता है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि G_1 चक्रीय है तो G_2 चक्रीय है।
2. यदि G_1 आबेली है तो G_2 आबेली है।
3. H यदि G_1 का उपसमूह है तो $\varphi(H)$ भी G_2 का उपसमूह होगा।
4. N यदि G_1 का प्रसामान्य उपसमूह है, तब $\varphi(N)$ भी G_2 का प्रसामान्य उपसमूह होगा।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

4.75 0.00

Multiple Response

86 704086

Let $n \geq 1$ be a positive integer and S_n the symmetric group on n symbols. Let $\Delta = \{(g,g): g \in S_n\}$. Which of the following statements are necessarily true?

1. The map $f: S_n \times S_n \to S_n$ given by $f(a,b) = ab$ is a group homomorphism.
2. Δ is a subgroup of $S_n \times S_n$.
3. Δ is a normal subgroup of $S_n \times S_n$.
4. Δ is a normal subgroup of $S_n \times S_n$, if n is a prime number.

मानें कि $n \geq 1$ एक धनात्मक पूर्णांक है तथा n प्रतीकों पर सममित समूह S_n है। मानें कि $\Delta = \{(g,g): g \in S_n\}$ हो। निम्न वक्तव्यों में से किन का सत्य होना आवश्यक है?

1. $f(a,b) = ab$ द्वारा दिया गया फलन $f: S_n \times S_n \to S_n$ समूह समकारिता है।
2. $S_n \times S_n$ का Δ एक उपसमूह है।
3. $S_n \times S_n$ का Δ एक प्रसामान्य उपसमूह है।
4. $S_n \times S_n$ का Δ एक प्रसामान्य उपसमूह होगा, यदि n एक अभाज्य संख्या है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

4.75 0.00

		A3: 3 3 A4: 4 4		
Multiple Response				
87	704087	Which of the following are maximal ideals of $\mathbb{Z}[X]$? 1. Ideal generated by 2 and $(1+X^2)$ 2. Ideal generated by 2 and $(1+X+X^2)$ 3. Ideal generated by 3 and $(1+X^2)$ 4. Ideal generated by 3 and $(1+X+X^2)$ निम्न में से कौन से $\mathbb{Z}[X]$ की विशिष्ठ गुणजावली (maximal idal) हैं? 1. 2 तथा $(1+X^2)$ द्वारा जनित गुणजावली 2. 2 तथा $(1+X+X^2)$ द्वारा जनित गुणजावली 3. 3 तथा $(1+X^2)$ द्वारा जनित गुणजावली 4. 3 तथा $(1+X+X^2)$ द्वारा जनित गुणजावली A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	4.75	0.00
Multiple Response				
88	704088	Let E be a finite algebraic Galois extension of F with Galois group G. Which of the following statements are true? 1. There is an intermediate field K with $K \neq F$ and $K \neq E$ such that K is a Galois extension of F. 2. If every proper intermediate field K is a Galois extension of F then G is Abelian. 3. If E has exactly three intermediate fields including F and E then G is Abelian. 4. If $[E:F] = 99$ then every intermediate field is a Galois extension of F E को F का गाल्वा समूह G के साथ परिमित बीजगणतीय गाल्वा विस्तार मानें। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं? 1. कोई एक ऐसा माध्यमिक क्षेत्र K है जिसके लिए $K \neq F$ तथा $K \neq E$ है एवं वह F का गाल्वा विस्तार है। 2. हर उचित माध्यमिक क्षेत्र K यदि F का गाल्वा विस्तार है तो G आबेली है। 3. यदि F तथा E को मिलाकर E के यथायथ तीन माध्यमिक क्षेत्र हों तब G आबेली है। 4. यदि $[E:F] = 99$ है तब हर माध्यमिक क्षेत्र F का गाल्वा विस्तार है।	4.75	0.00

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		
Multiple Response				
89	704089	Which of the following statements are correct ? 1. The set of open right half-planes is a basis for the usual (Euclidean) topology on $\mathbb{R}^2$. 2. The set of lines parallel to Y-axis is a basis for the dictionary order topology on $\mathbb{R}^2$. 3. The set of open rectangles is a basis for the usual (Euclidean) topology on $\mathbb{R}^2$. 4. The set of line segments (without end points) parallel to Y-axis is a basis for the dictionary order topology on $\mathbb{R}^2$. निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं ? 1. विवृत दक्षिण अर्ध तलों का समुच्चय $\mathbb{R}^2$ पर साधारण (यूक्लिडीय) संस्थिति के लिए एक आधार है। 2. Y-अक्ष के समांतर रेखाओं का समुच्चय $\mathbb{R}^2$ पर डिक्शनरी ऑर्डर संस्थिति के लिए एक आधार है। 3. विवृत्त आयतों का समुच्चय $\mathbb{R}^2$ पर साधारण (यूक्लिडीय) संस्थिति के लिए एक आधार है। 4. Y-अक्ष के समांतर रेखा खंडो का समुच्चय (बिना अंत्य बिंदुओं के) $\mathbb{R}^2$ पर डिक्शनरी ऑर्डर संस्थिति के लिए एक आधार है। A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	4.75	0.00
Multiple Response				
90	704090		4.75	0.00

Let $X = \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$, that is, the space of sequences $\{x_n\}_{n\geq 1}$ with $x_n \in [0,1]$, $n \geq 1$.
Define the metric $d: X \times X \to [0, \infty)$ by

$$d(\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}) = \sup_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

Which of the following statements are true?

1. The metric topology on X is finer than the product topology on X.
2. The metric topology on X is coarser than the product topology on X.
3. The metric topology on X is same as the product topology on X.
4. The metric topology on X and the product topology on X are not comparable.

मानें कि $X = \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$, अर्थात अनुक्रमों $\{x_n\}_{n\geq 1}$ जहां $x_n \in [0,1], n \geq 1$, की समष्टि है।
दूरीक $d: X \times X \to [0,\infty)$ निम्न द्वारा परिभाषित करें

$$d(\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}) = \sup_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

निम्न वक्यव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. X पर दूरीक संस्थिति, X पर गुणन संस्थिति से सूक्ष्तमतर है।
2. X पर दूरीक संस्थिति, X पर गुणन संस्थिति की तुलना में अधिक स्थूल है।
3. X पर दूरीक संस्थिति, X पर गुणन संस्थिति के बराबर है।
4. X पर दूरीक संस्थिति, X पर गुणन संस्थिति के तुल्य नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

91	704091	Let $f \in C^1(\mathbb{R})$ be bounded. Let us consider the initial-value problem	4.75	0.00

Let $f \in C^1(\mathbb{R})$ be bounded. Let us consider the initial-value problem

$$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = & f(x(t)),\ t > 0, \\ x(0) = & 0. \end{cases}$$

Which of the following statements are true?

1. (P) has solution(s) defined for all $t > 0$.
2. (P) has a unique solution.
3. (P) has infinitely many solutions.
4. The solution(s) of (P) is/are Lipschitz.

मानें कि $f \in C^1(\mathbb{R})$ परिबद्ध है। निम्न प्रारंभिक मान समस्या पर विचार करें

$$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = & f(x(t)), t > 0, \\ x(0) = & 0. \end{cases}$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. (P) का सभी $t > 0$ के लिए हल परिभाषित हैं।
2. (P) का अद्वितीय हल है।
3. (P) के अनंत हल हैं।
4. (P) का/ के हल लिपशिट्ज है/हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

92	704092	Consider the following initial value problem (IVP),	4.75	0.00

Consider the following initial value problem (IVP),

$$\frac{du}{dt} = t^2 u^{\frac{1}{5}}, \quad u(0) = 0.$$

Which of the following statements are correct?

1. The function $g(t,u) = t^2 u^{\frac{1}{5}}$ does not satisfy the Lipschitz's condition with respect to u in any neighbourhood of $u = 0$.
2. There is no solution for the IVP.
3. There exist more than one solution for the IVP.
4. The function $g(t,u) = t^2 u^{\frac{1}{5}}$ satisfies the Lipschitz's condition with respect to u in some neighbourhood of $u = 0$ and hence there exists a unique solution for the IVP.

निम्न प्रारंभिक मान समस्या पर विचार करें

$$\frac{du}{dt} = t^2 u^{\frac{1}{5}}, \quad u(0) = 0.$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सही हैं ?

1. $u = 0$ के किसी भी प्रतिवेश में u के सापेक्ष फलन $g(t,u) = t^2 u^{\frac{1}{5}}$ लिपशिट्ज प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करता।
2. प्रारंभिक मान समस्या का कोई हल नहीं है।
3. प्रारंभिक मान समस्या के लिए एक से अधिक हल हैं।
4. $u = 0$ के किसी प्रतिवेश में u के सापेक्ष फलन $g(t,u) = t^2 u^{\frac{1}{5}}$ लिपशिट्ज प्रतिबंध को संतुष्ट करता है तथा इसलिए प्रारंभिक मान समस्या के लिए एक अद्वितीय हल है।

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		

Multiple Response

93	704093	Let us consider the following two initial value problems $$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = & \sqrt{x(t)},\ t > 0, \\ x(0) = & 0, \end{cases}$$ and $$(Q) \quad \begin{cases} y'(t) = & -\sqrt{y(t)},\ t > 0, \\ y(0) = & 0. \end{cases}$$ Which of the following statements are true? 1. (P) has a unique solution in $[0, \infty)$. 2. (Q) has a unique solution in $[0, \infty)$. 3. (P) has infinitely many solutions in $[0, \infty)$. 4. (Q) has infinitely many solutions in $[0, \infty)$. निम्न दो प्रारंभिक मान समस्याओं पर विचार करें $$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = & \sqrt{x(t)},\ t > 0, \\ x(0) = & 0, \end{cases}$$ तथा $$(Q) \quad \begin{cases} y'(t) = & -\sqrt{y(t)},\ t > 0, \\ y(0) = & 0. \end{cases}$$ निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं? 1. (P) का $[0, \infty)$ में अद्वितीय हल है। 2. (Q) का $[0, \infty)$ में अद्वितीय हल है। 3. (P) के $[0, \infty)$ में अनंत हल हैं। 4. (Q) के $[0, \infty)$ में अनंत हल हैं। A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3	4.75	0.00

		A4: 4 4		

Multiple Response

94	704094	Let $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be the solution to the Cauchy problem: $\begin{cases} \partial_x u + 2\partial_y u = 0 & \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,y) = \sin(x) & \text{for } y = 3x+1,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Let $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be the solution to the Cauchy problem: $\begin{cases} \partial_x v + 2\partial_y v = 0 & \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,0) = \sin(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Let $\mathcal{S} = [0,1] \times [0,1]$. Which of the following statements are true? 1. u changes sign in the interior of $\mathcal{S}$. 2. $u(x,y) = v(x,y)$ along a line in $\mathcal{S}$. 3. v changes sign in the interior of $\mathcal{S}$. 4. v vanishes along a line in $\mathcal{S}$. मानें कि $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ निम्न कौशी समस्या का हल है: $\begin{cases} \partial_x u + 2\partial_y u = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ के लिए}, \\ u(x,y) = \sin(x) & y = 3x+1,\ x \in \mathbb{R} \text{ के लिए}. \end{cases}$ मानें कि $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ निम्न कॉशी समस्या का हल है: $\begin{cases} \partial_x v + 2\partial_y v = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,0) = \sin(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ मानें की $\mathcal{S} = [0,1] \times [0,1]$ हो। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं? 1. u अपना चिह्न $\mathcal{S}$ के अंतः में परिवर्तित करता है। 2. $\mathcal{S}$ के अन्दर एक रेखा पर $u(x,y) = v(x,y)$ होता है। 3. v अपना चिह्न $\mathcal{S}$ के अंतः में परिवर्तित करता है। 4. $\mathcal{S}$ के अन्दर एक रेखा पर v लुप्त हो जाता है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	4.75	0.00

Multiple Response

95	704095		4.75	0.00

Let $u = u(x, y)$ be the solution to the following Cauchy problem

$$u_x + u_y = e^u \quad \text{for } (x,y) \in \mathbb{R} \times \left(0, \frac{1}{e}\right) \quad \text{and} \quad u(x,0) = 1 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

Which of the following statements are true?

1. $u(\frac{1}{2e}, \frac{1}{2e}) = 1$
2. $u_x(\frac{1}{2e}, \frac{1}{2e}) = 0$
3. $u_y(\frac{1}{4e}, \frac{1}{4e}) = \log 4$
4. $u_y(0, \frac{1}{4e}) = \frac{4e}{3}$

मानें कि $u = u(x, y)$ निम्न कौशी समस्या का हल है:

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \left(0, \frac{1}{e}\right)$ के लिए $u_x + u_y = e^u$ तथा $x \in \mathbb{R}$ के लिए $u(x, 0) = 1$ है।

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. $u(\frac{1}{2e}, \frac{1}{2e}) = 1$
2. $u_x(\frac{1}{2e}, \frac{1}{2e}) = 0$
3. $u_y(\frac{1}{4e}, \frac{1}{4e}) = \log 4$
4. $u_y(0, \frac{1}{4e}) = \frac{4e}{3}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

96	704096	Consider the following two sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ given by	4.75	0.00

Consider the following two sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ given by

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$
$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Which of the following statements are true?

1. $\{a_n\}$ converges to log 2, and has the same convergence rate as the sequence $\{b_n\}$.
2. $\{a_n\}$ converges to log 4, and has the same convergence rate as the sequence $\{b_n\}$.
3. $\{a_n\}$ converges to log 2, but does not have the same convergence rate as the sequence $\{b_n\}$.
4. $\{a_n\}$ does not converge.

		निम्न द्वारा दिये गए दो अनुक्रमों $\{a_n\}$ तथा $\{b_n\}$ पर विचार करें $$a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$ $$b_n = \frac{1}{n}.$$ निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं? 1. $\{a_n\}$ अभिसरित हो जाता है log 2 में, तथा उतनी ही अभिसरण दर से जितनी अनुक्रम $\{b_n\}$ की है । 2. $\{a_n\}$ अभिसरित हो जाता है log 4 में, तथा उतनी ही अभिसरण दर से जितनी अनुक्रम $\{b_n\}$ की है। 3. $\{a_n\}$ अभिसरित हो जाता है log 2 में, लेकिन अभिसरण दर अनुक्रम $\{b_n\}$ जितनी नहीं है। 4. $\{a_n\}$ अभिसरित नहीं होता है। A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4		
Multiple Response				
97	704097	Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined as $f(x)=\frac{1}{4}+x-x^2$. Given $a\in\mathbb{R}$, let us define the sequence $\{x_n\}$ by $x_0=a$ and $x_n=f(x_{n-1})$ for $n\geq 1$. Which of the following statements are true? 1. If $a=0$, then the sequence $\{x_n\}$ converges to $\frac{1}{2}$. 2. If $a=0$, then the sequence $\{x_n\}$ converges to $-\frac{1}{2}$. 3. The sequence $\{x_n\}$ converges for every $a\in\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, and it converges to $\frac{1}{2}$. 4. If $a=0$, then the sequence $\{x_n\}$ does not converge. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ को $f(x)=\frac{1}{4}+x-x^2$ द्वारा परिभाषित करें। किसी भी $a\in\mathbb{R}$ के लिए अनुक्रम $\{x_n\}$ को ऐसे परिभाषित करें कि $x_0=a$ तथा $n\geq 1$ के लिए $x_n=f(x_{n-1})$ है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं? 1. यदि $a=0$ है, तब अनुक्रम $\{x_n\}$ का अभिसरण $\frac{1}{2}$ में होता है। 2. यदि $a=0$ है, तब अनुक्रम $\{x_n\}$ का अभिसरण $-\frac{1}{2}$ में होता है । 3. सभी $a\in\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ के लिए अनुक्रम $\{x_n\}$ का अभिसरण होता है तथा यह $\frac{1}{2}$ में अभिसरित होता है। 4. यदि $a=0$ है, तब अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसरित नहीं होता है। A1: 1 1	4.75	0.00

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

98 704098 4.75 0.00

Suppose $y(x)$ is an extremal of the following functional

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y(x)^2 - 4y(x)y'(x) + 4y'(x)^2)dx$$

subject to $y(0) = 1$ and $y'(0) = 1/2$.
Which of the following statements are true?

1. y is a convex function.
2. y is a concave function.
3. $y(x_1 + x_2) = y(x_1)y(x_2)$ for all x_1, x_2 in [0,1].
4. $y(x_1 x_2) = y(x_1) + y(x_2)$ for all x_1, x_2 [0,1].

मानें कि $y(x)$ निम्न फलनक का चरम है

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y(x)^2 - 4y(x)y'(x) + 4y'(x)^2)dx$$

इस प्रतिबंध के साथ कि $y(0) = 1$ तथा $y'(0) = 1/2$.
निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. y अवमुखी फलन है।
2. y उन्मुख फलन है।
3. $y(x_1 + x_2) = y(x_1)y(x_2)$ सभी x_1, x_2 [0,1] के लिए।
4. $y(x_1 x_2) = y(x_1) + y(x_2)$ सभी x_1, x_2 [0,1] के लिए।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

99 704099 4.75 0.00

Let $y(x)$ and $z(x)$ be the stationary functions (extremals) of the variational problem

$$J(y(x), z(x)) = \int_0^1 [(y')^2 + (z')^2 + y'z']dx$$

subject to $y(0) = 1,\ y(1) = 0,\ z(0) = -1,\ z(1) = 2.$

Which of the following statements are correct?

1. $z(x) + 3y(x) = 2$ for $x \in [0,1]$.
2. $3z(x) + y(x) = 2$ for $x \in [0,1]$.
3. $y(x) + z(x) = 2x$ for $x \in [0,1]$.
4. $y(x) + z(x) = x$ for $x \in [0,1]$.

मानें कि $y(x)$ तथा $z(x)$ निम्न विचरणात्मक समस्या के स्तब्ध फलन (चरम) हैं

$$J(y(x), z(x)) = \int_0^1 [(y')^2 + (z')^2 + y'z']dx$$

इस प्रतिबंध के साथ कि $y(0) = 1,\ y(1) = 0,\ z(0) = -1,\ z(1) = 2$ हैं।

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सही हैं?

1. $x \in [0,1]$ के लिए $z(x) + 3y(x) = 2$
2. $x \in [0,1]$ के लिए $3z(x) + y(x) = 2$
3. $x \in [0,1]$ के लिए $y(x) + z(x) = 2x$
4. $x \in [0,1]$ के लिए $y(x) + z(x) = x$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

100	704100	Let $\lambda_1 < \lambda_2$ be two real characteristic numbers for the following homogeneous integral equation: $$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\,\varphi(t)\,dt;$$ and let $\mu_1 < \mu_2$ be two real characteristic numbers for the following homogeneous integral equation: $$\psi(x) = \mu \int_0^{\pi} \cos(x+t)\,\psi(t)\,dt.$$ Which of the following statements are true? 1. $\mu_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \mu_2$ 2. $\lambda_1 < \mu_1 < \mu_2 < \lambda_2$ 3. $\|\mu_1 - \lambda_1\| = \|\mu_2 - \lambda_2\|$ 4. $\|\mu_1 - \lambda_1\| = 2\|\mu_2 - \lambda_2\|$	4.75	0.00

मानें कि $\lambda_1 < \lambda_2$ निम्नलिखित समघात समाकल समीकरण के लिए दो अभिलक्षणिक संख्यायें हैं

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\, \varphi(t)\, dt;$$

तथा मानें कि $\mu_1 < \mu_2$ निम्नलिखित समघात समाकल समीकरण के लिए दो वास्तविक अभिलक्षणिक संख्यायें हैं

$$\psi(x) = \mu \int_0^{\pi} \cos(x+t)\, \psi(t)\, dt.$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\mu_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \mu_2$
2. $\lambda_1 < \mu_1 < \mu_2 < \lambda_2$
3. $|\mu_1 - \lambda_1| = |\mu_2 - \lambda_2|$
4. $|\mu_1 - \lambda_1| = 2|\mu_2 - \lambda_2|$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

101	704101	Let $K \in C([0,1] \times [0,1])$ satisfy $\|K(x,y)\| < 1$ for all $x, y \in [0,1]$. For every $g \in C[0,1]$, let us consider the integral equation	4.75	0.00

$$(P_g) \qquad f(x) + \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy = g(x), \text{ for all } x \in [0,1].$$

Which of the following statements are true?

1. there exists a $g \in C[0,1]$ for which (P_g) has no solution in $C[0,1]$.
2. (P_g) has a solution in $C[0,1]$ for infinitely many $g \in C[0,1]$.
3. the solution of (P_g) in $C[0,1]$ is unique if $g \in C^1[0,1]$.
4. there exists a $g \in C[0,1]$ for which (P_g) has infinitely many solutions in $C[0,1]$.

मानें कि $K \in C([0,1] \times [0,1])$ सब $x, y \in [0,1]$ के लिए $|K(x,y)| < 1$ को संतुष्ट करता है। प्रत्येक $g \in C[0,1]$ के लिए, निम्न समाकल समीकरण पर विचार करें

$$(P_g) \qquad f(x) + \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy = g(x), \text{ सभी } x \in [0,1] \text{के लिए।}$$

निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. ऐसे $g \in C[0,1]$ का अस्तित्व है जिसके लिए $C[0,1]$ में (P_g) का कोई हल नहीं है।
2. अनंततः बहु $g \in C[0,1]$ के लिए (P_g) का $C[0,1]$ में हल है।
3. यदि $g \in C^1[0,1]$ है, तब (P_g) का $C[0,1]$ में हल अद्वितीय है।
4. ऐसा $g \in C[0,1]$ का अस्तित्व है जिसके लिए $C[0,1]$ में (P_g) के अनंत हल हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

102 | 704102 | 4.75 | 0.00

A point particle having unit mass is moving in x, y plane having the Lagrangian as follows

$$L = \dot{x}\dot{y} - 2x^2 - 2y^2.$$

What are the possible values of p_r (conjugate momentum to radial coordinate in plane polar coordinate)?

1. $\dot{r}$
2. $\dot{r}\sin 2\theta + r\dot{\theta}\cos 2\theta$
3. $\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
4. $2\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

इकाई द्रव्यमान वाले, x-y तल में गतिमान एक बिंदु कण का लग्रांजी (Lagrangian) निम्नवत है

$$L = \dot{x}\dot{y} - 2x^2 - 2y^2.$$

p_r (समतल ध्रुवी निर्देशांक में संयुग्मी संवेग से त्रिज्य निर्देशांक) के सम्भव मान क्या हैं?

1. $\dot{r}$
2. $\dot{r}\sin 2\theta + r\dot{\theta}\cos 2\theta$
3. $\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
4. $2\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

103 | 704103 | 4.75 | 0.00

Suppose $X_1, X_2, \ldots$ are independent and identically distributed $N(0,1)$ random variables and $Y_n = X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4$. Which of the following probabilities converge to $\frac{1}{2}$ as $n \to \infty$?

1. $\mathbb{P}\{Y_n \in [0,2n]\}$
2. $\mathbb{P}\{Y_n \in [n,3n]\}$
3. $\mathbb{P}\{Y_n \in [2n,4n]\}$
4. $\mathbb{P}\{Y_n \in [3n,5n]\}$

मानें कि $X_1, X_2, \ldots$ स्वतंत्र तथा सर्वथा समतः बंटित $N(0,1)$ यादृच्छिक चर हैं एवं $Y_n = X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4$ है। निम्न में से कौन सी प्रायिकतायें $n \to \infty$ के साथ $\frac{1}{2}$ को अभिसरित होती हैं?

1. $\mathbb{P}\{Y_n \in [0,2n]\}$
2. $\mathbb{P}\{Y_n \in [n, 3n]\}$
3. $\mathbb{P}\{Y_n \in [2n, 4n]\}$
4. $\mathbb{P}\{Y_n \in [3n, 5n]\}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

104	704104		4.75	0.00

Let A, B be two events in a discrete probability space with $\mathbb{P}(A) > 0$ and $\mathbb{P}(B) > 0$. Which of the following are necessarily true?

1. If $\mathbb{P}(A \mid B) = 0$ then $\mathbb{P}(B \mid A) = 0$.
2. If $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$ then $\mathbb{P}(B \mid A) = 1$.
3. If $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ then $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B)$.
4. If $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(B)$ then $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(A)$.

मानें कि A, B वियुक्त प्रायिकता समष्टि में से दो घटनायें हैं जहां $\mathbb{P}(A) > 0$ तथा $\mathbb{P}(B) > 0$ हैं। निम्न में से कौन से सही होने आवश्यक हैं?

1. यदि $\mathbb{P}(A \mid B) = 0$ है तब $\mathbb{P}(B \mid A) = 0$ है।
2. यदि $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$ है तब $\mathbb{P}(B \mid A) = 1$ है।
3. यदि $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ है तब $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B)$ है।
4. यदि $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(B)$ है तब $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(A)$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

105	704105		4.75	0.00

Let $n \geq 2$ be a positive integer. Consider a Markov chain on the state space $\{1,2,\cdots,n\}$ with a given transition probability matrix P. Let I_n denote the identity matrix of order n. Which of the following statements are necessarily true?

1. At least one state is recurrent.
2. At least one state is transient.
3. $-\frac{1}{3}I_n + \frac{4}{3}P$ is also a transition probability matrix of some Markov chain.
4. 5 is an eigenvalue of $I_n + 3P + P^2$.

मानें कि $n \geq 2$ एक धनात्मक पूर्णांक संख्या है। अवस्था समष्टि $\{1,2,\cdots,n\}$ पर दिये गये संक्रमण प्रायिकता आव्यूह P वाली मार्कोव श्रृंखला पर विचार करें। मानें कि I_n कोटि n का तत्समक आव्यूह दर्शाता है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य होने आवश्यक हैं?

1. कम से कम एक अवस्था पुनरावर्ती है।
2. कम से कम एक अवस्था क्षणिक है।
3. $-\frac{1}{3}I_n + \frac{4}{3}P$ किसी मार्कोव श्रृंखला का संक्रमण परायिकता आव्यूह भी है।
4. $I_n + 3P + P^2$ का एक अभिलक्षणिक मान 5 है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

106	704106	Let X_i, for $i = 1,2,\ldots,2n, n \geq 1$, be independent random variables each distributed as N(0,1). Which of the following statements are correct?	4.75	0.00

1. $(X_1 + \cdots + X_n - X_{n+1} - \cdots - X_{2n})/2n \sim N(0,2)$
2. $(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + \cdots + (X_{2n-1} - X_{2n})^2 \sim 2\chi^2_n$
3. $E[max\ (|X_1|, |X_{n+1}|)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
4. $E[max\ (|X_1|, |X_{n+1}|)] = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$

मानें कि $i = 1,2,\ldots,2n, n \geq 1$ के लिए X_i स्वतंत्र याद्दच्छिक चर हैं जहां प्रत्येक N(0,1) के अनुसार बंटित है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. $(X_1 + \cdots + X_n - X_{n+1} - \cdots - X_{2n})/2n \sim N(0,2)$
2. $(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + \cdots + (X_{2n-1} - X_{2n})^2 \sim 2\chi^2_n$
3. $E[max\ (|X_1|, |X_{n+1}|)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
4. $E[max\ (|X_1|, |X_{n+1}|)] = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$

A1: 1

		1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		
Multiple Response				
107	704107	Let a continuous random variable X follow $Uniform(-1,1)$. Define $Y = X^2$. Which of the following are NOT true for X and Y? 1. They are independent and uncorrelated. 2. They are independent but correlated. 3. They are not independent but correlated. 4. They are neither independent nor correlated. मानें कि कोई संतत यादृच्छिक चर X $Uniform(-1,1)$ का अनुसरण करता है। परिभाषित करें $Y = X^2$. निम्न में से कौन से X तथा Y के लिए सत्य नहीं हैं? 1. वे स्वतंत्र तथा असहसंबंधित हैं। 2. वे स्वतंत्र हैं परन्तु सहसंबंधित नहीं हैं। 3. वे स्वतंत्र नहीं हैं परंतु सहसंबंधित हैं। 4. वे न तो स्वतंत्र हैं न सहसंबधित हैं। A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4	4.75	0.00
Multiple Response				
108	704108	Let X and Y be independent Poisson random variables with parameters 2 and 3, respectively. Which of the following statements are correct? 1. $Var(X\|X+Y=2) = \frac{12}{25}$ 2. $E\left(\frac{2}{1+X}\|X+Y=2\right) = \frac{98}{3}$ 3. $P(X^2=0\|X+Y=2) = e^{-2} + \frac{9}{25}(1-e^{-2})$ 4. $X\|Y=3 \sim Binomial(3,2)$	4.75	0.00

X तथा Y को क्रमशः 2 एवं 3 प्राचल वाला स्वतंत्र प्वासों यादृच्छिक चर मानें। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सही हैं?

1. $Var(X|X+Y=2) = \frac{12}{25}$

2. $E\left(\frac{2}{1+X}|X+Y=2\right) = \frac{98}{3}$

3. $P(X^2 = 0|X+Y=2) = e^{-2} + \frac{9}{25}(1-e^{-2})$

4. $X|Y=3 \sim Binomial(3,2)$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

109	704109	Let $\{X_i\colon 1 \le i \le 2n\}$ be independently and identically distributed normal random variables with mean μ and variance 1, and independent of a standard Cauchy random variable W. Which of the following statistics are consistent for μ?	4.75	0.00

1. $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

2. $n^{-1}\sum_{i=1}^{2n} X_i$,

3. $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}$,

4. $n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i + W)$.

मानें कि $\{X_i\colon 1 \le i \le 2n\}$ माध्य μ तथा प्रसरण 1 वाले स्वतंत्र एवं सर्वथा समतः बंटित प्रसामान्य यादृच्छिक चर हैं, एवं एक मानक कौशी यादृच्छिक चर W से स्वतंत्र है। निम्न सांख्यिकी में से कौन से μ के लिए अविरोधी हैं?

1. $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

2. $n^{-1}\sum_{i=1}^{2n} X_i$,

3. $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}$,

4. $n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i + W)$.

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

		A4: 4 4		

Multiple Response

110	704110	Which of the following statements are true? 1. Maximum likelihood estimator may not be unique. 2. A complete statistic is always sufficient. 3. A sufficient statistic may not be complete. 4. Any function of a sufficient statistic is always sufficient. निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं? 1. हो सकता है कि अधिकतम संभाविता आकलक अद्वितीय न हो 2. एक पूर्ण प्रतिदर्शज सदा पर्याप्त है 3. हो सकता है कि एक पर्याप्त प्रतिदर्शज पूर्ण न हो 4. पर्याप्त प्रतिदर्शज का कोई भी फलन सदा पर्याप्त है A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	4.75	0.00

Multiple Response

111	704111	Let X_1 and X_2 be two independent random variables such that X_1 follows a gamma distribution with mean 10 and variance 10, and $X_2 \sim N(3,4)$. Let f_1 and f_2 denote the density functions of X_1 and X_2, respectively. Define a new random variable Y so that for $y \in \mathbb{R}$, it has density function $$f(y) = 0.4 f_1(y) + q f_2(y).$$ Which of the following are true? 1. $q = 0.6$ 2. $E[Y] = 5.8$ 3. $\text{Var}(Y) = 3.04$ 4. $Y = 0.4X_1 + qX_2$	4.75	0.00

माने कि X_1 तथा X_2 दो ऐसे स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं कि माध्य 10 तथा प्रसरण 10 के साथ X_1 गामा बंटन का अनुसरण करता है, एवं $X_2 \sim N(3,4)$. मानें कि f_1 तथा f_2 से आशय क्रमशः X_1 तथा X_2 के घनत्व फलनों से है। नया यादृच्छिक चर Y इस प्रकार परिभाषित करें कि $y \in \mathbb{R}$ के लिए निम्नलिखित घनत्व फलन हो

$$f(y) = 0.4 f_1(y) + q f_2(y).$$

निम्न में कौन से सत्य हैं?

1. $q = 0.6$
2. $E[Y] = 5.8$
3. $\mathrm{Var}(Y) = 3.04$
4. $Y = 0.4X_1 + qX_2$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

112	704112	Suppose under the null hypothesis H, $X \sim p$, where $p(x) = P(X = x) = 1/20$, $x \in \{1,2,\ldots 20\}$ and under the alternative hypothesis K, $X \sim q$ where $q(x) = P(X = x) = \frac{x}{210}$, $x \in \{1,2,\ldots 20\}$. Define two test functions ϕ and ψ for testing H against K such that, $\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \le 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$ and $\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \ge 19 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$ Which of the following statements are true? 1. Size of the test ϕ is 0.1. 2. Size of the test ψ is 0.05. 3. (Power of the test ψ) > 0.05. 4. (Power of the test ψ) $>$ (Power of the test ϕ).	4.75	0.00

मानें कि निराकरणीय परिकल्पना H के अन्तर्गत, $X \sim p$ है, जहां $p(x) = P(X = x) = 1/20$, $x \in \{1,2,\ldots 20\}$ है, तथा वैकल्पिक परिकल्पना K के अन्तर्गत, $X \sim q$ है, जहां $q(x) = P(X = x) = \frac{x}{210}$ $x \in \{1,2,\ldots 20\}$ है। H को K के विरूद्ध परीक्षित करने के लिए दो परीक्षण-फलन ϕ एवं ψ इस प्रकार परिभाषित करें कि

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \leq 2, \\ 0 & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

तथा

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \geq 19, \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हैं। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. परीक्षण ϕ का आमाप 0.1 है।
2. परीक्षण ψ का आमाप 0.05 है।
3. (परीक्षण ψ की क्षमता) > 0.05 है।
4. (परीक्षण ψ की क्षमता) $>$ (परीक्षण ϕ की क्षमता) है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

113	704113	Suppose $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are independently and identically distributed $N(0, \tau^{-2})$ random variables, for $\tau^{-2} > 0$. Let the prior distribution on τ^2 have density $\pi(\tau^2) \propto (1/\tau^2)^\alpha$ for some $\alpha > 0$. Which of the following are true?	4.75	0.00

1. The prior distribution is an improper distribution for $\alpha > 0$.
2. The posterior distribution is a proper distribution for all $\alpha > 0$.
3. Under a squared error loss, the generalized Bayes estimator of τ^2 is $\frac{n/2-\alpha}{\sum_{i=1}^n X_i^2/2}$.
4. The posterior distribution is proper for $\alpha = 1$.

मानें कि $\tau^{-2} > 0$ के लिए $X_1, X_2, \ldots, X_n$ स्वतंत्र तथा सर्वथासमतः बंटित $N(0, \tau^{-2})$ यादृच्छिक चर हैं। मानें कि कुछ $\alpha > 0$ के लिए τ^2 पर पूर्व-बंटन के घनत्व $\pi(\tau^2) \propto (1/\tau^2)^\alpha$ हैं। निम्न में से कौन से सत्य हैं?

1. $\alpha > 0$ के लिए पूर्व बंटन अनुचित बंटन है।
2. सब $\alpha > 0$ के लिए पश्च बंटन उचित बंटन है।
3. वर्गित त्रुटि हानि के लिए τ^2 का प्रसामान्यीकृत बेज आकलक $\frac{n/2-\alpha}{\sum_{i=1}^n X_i^2/2}$ है।
4. पश्च बंटन $\alpha = 1$ के लिए उचित है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

114	704114	Let $(X_1, Y_1), \dots, (X_4, Y_4)$ be a random sample from a continuous bivariate distribution function $F_{X,Y}$ with marginal distributions of X and Y being F_X and F_Y respectively. In order to test the null hypothesis H_0: 'X and Y are independent' against the alternative H_1: 'X and Y are positively associated', consider the Kendall sample correlation statistic	4.75	0.00

$$K = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \psi((X_i, Y_i), (X_j, Y_j)),$$

where

$$\psi((a,b),(c,d)) = \begin{cases} 1, & \text{if } (d-b)(c-a) > 0, \\ -1, & \text{if } (d-b)(c-a) < 0. \end{cases}$$

Assuming no ties, which of the following are true?

1. The test that rejects H_0 for $K \geq 4$ has size 1/4.
2. The test that rejects H_0 for $K \geq 4$ has size 1/6.
3. $P_{H_0}(K = 4) = 3/24$.
4. $P_{H_0}(K = 6) = 1/12$.

मानें कि $(X_1, Y_1), \dots, (X_4, Y_4)$ संतत द्विचर बंटन फलन $F_{X,Y}$ के यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं जहां X तथा Y के क्रमशः F_X एवं F_Y सीमांत बंटन हैं। निराकरणीय परिकल्पना H_0: 'X तथा Y स्वतंत्र हैं' को विकल्प H_1: 'X तथा Y घनात्मक रूप से सहचारी हैं' के विरूद्ध परीक्षित करने के लिए कैंडाल प्रतिदर्श सहसंबंध प्रतिदर्शज पर विचार करें

$$K = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \psi((X_i, Y_i), (X_j, Y_j)),$$

जहां

$$\psi((a,b),(c,d)) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } (d-b)(c-a) > 0, \\ -1, & \text{यदि } (d-b)(c-a) < 0. \end{cases}$$

मानें कि कोई ties नहीं है, तब निम्न में से कौन से सत्य हैं?

1. उस परिक्षण का आमाप जो H_0 को $K \geq 4$ पर नकारता है ¼ है।
2. उस परीक्षण का आमाप जो H_0 को $K \geq 4$ पर नकारता है, 1/6 है।
3. $P_{H_0}(K = 4) = 3/24$.
4. $P_{H_0}(K = 6) = 1/12$.

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

		4		

Multiple Response

115	704115	Consider the linear model $E(Y_1) = 2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3, E(Y_2) = \beta_2 - \beta_4, E(Y_3) = \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_4$ with uncorrelated and homoscedastic random error. Which of the following linear parametric functions are estimable? 1. $16\beta_1 - 9\beta_2 - 7\beta_3$ 2. $\beta_3 - \beta_4$ 3. $57\beta_1 - 18\beta_2 - 13\beta_3 - 26\beta_4$ 4. $23\beta_1 - 9\beta_2 - 10\beta_3 + 4\beta_4$ असहसंबद्ध तथा समविचाली यादृच्छिक त्रुटि वाले रैखिक निदर्श (model) $E(Y_1) = 2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3,\ E(Y_2) = \beta_2 - \beta_4,\ E(Y_3) = \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_4$ पर विचार करें। निम्न रैखिक प्राचलिक फलनों में से कौन से आकलनीय हैं? 1. $16\beta_1 - 9\beta_2 - 7\beta_3$ 2. $\beta_3 - \beta_4$ 3. $57\beta_1 - 18\beta_2 - 13\beta_3 - 26\beta_4$ 4. $23\beta_1 - 9\beta_2 - 10\beta_3 + 4\beta_4$ A1: 1 1 A2: 2 2 A3: 3 3 A4: 4 4	4.75	0.00

Multiple Response

116	704116	Consider the multiple linear regression model $Y = X\beta + \epsilon$; where Y is $n \times 1$ observed data vector with $n > 5$; X is $n \times 5$ matrix of known constants with $rank(X) = 5$; $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T$ and $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T$, where ϵ_i for $i = 1, \dots, n$ are independent and identically distributed $N(0,1)$ random variables. Consider testing of the linear hypothesis $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = c$, (a known constant) against the alternative $H_1: H_0$ is not true. Which of the following statements are true? 1. The sum of squares residuals under H_0 follows a central χ^2 distribution with $(n-5)$ degrees of freedom. 2. The sum of squares residuals under H_0 follows a central χ^2 distribution with $(n-1)$ degrees of freedom. 3. The test statistic follows a central F distribution with $(5, n-1)$ degrees of freedom. 4. The test statistic follows a central F distribution with $(4, n-5)$ degrees of freedom.	4.75	0.00

बहु रैखिक समाश्रयणी निदर्श (model) $Y = X\beta + \epsilon$ पर विचार करें,जहां Y एक $n \times 1$ पर्यवेक्षित दत्त सदिश (data vector) है जिसके लिए $n > 5$ है; X ज्ञात नियतांको वाला $n \times 5$ आव्यूह है जिसके लिए $rank\,(X) = 5$ है; $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T$ तथा $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T$, जहां ϵ_i, $i = 1, \dots, n$, स्वतंत्रत: बंटित $N(0,1)$ यादृच्छिक चर हैं। रैखिक परिकल्पना $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = c$, (एक ज्ञात नियतांक) के विकल्प $H_1: H_0$ सत्य नहीं है, पर विचार करें। निम्न वक्तव्यों में से कौन से वक्तव्य सत्य हैं?

1. H_0के अन्तर्गत वर्ग अवशिष्टों का योग (sum of squares residuals) स्वातंत्र्य कोटि $(n-5)$ के साथ केन्द्रीय χ^2 बंटन का अनुसरण करता है।
2. H_0 के अन्तर्गत वर्ग अवशिष्टों का योग स्वातंत्रय कोटि $(n-1)$ के साथ केन्द्रीय χ^2 बंटन का अनुसरण करता है।
3. परीक्षण प्रतिदर्शज स्वातंत्र्य कोटि $(5, n-1)$ के साथ केन्द्रीय F बंटन का अनुसरण करता है।
4. परीक्षण प्रतिदर्शज स्वातंत्र्य कोटि $(4, n-5)$ के साथ केन्द्रीय F बंटन का अनुसरण करता है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

117 | 704117 | 4.75 | 0.00

Suppose that $\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_n}, \mathbf{X_{n+1}}$ is a random sample of size $\mathbf{n}+1$, where $p > 2$ and $\mathbf{n} > p + 3$, from a multivariate normal population, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$; $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p$ and $\boldsymbol{\Sigma} > 0$. Let $\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_i}$ and $(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{X_i} - \bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n})(\mathbf{X_i} - \bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n})^\mathbf{T}$. Which of the following are correct?

1. $(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}})^\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}}) \sim \frac{\mathbf{p(n^2-1)}}{\mathbf{n(n-p)}}\,\mathbf{F_{p,n-p}}$
2. $E(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n}^\mathbf{T}\,\mathbf{S}\,\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n}) = trace\left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}^2}{\mathbf{n}}\right) + \boldsymbol{\mu}^\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\mu}$
3. $E(\mathbf{S}^{-1}) = \frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}-p-2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$
4. $(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}})^\mathbf{T}\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}}) \sim \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{n}}\chi_p^2$

मानें कि $\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_n}, \mathbf{X_{n+1}}$बहुचर प्रसामान्य समष्टि, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$; $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p$ तथा $\boldsymbol{\Sigma} > 0$ से लिया आमाप $\mathbf{n}+1$ का यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जहां $p > 2$ तथा $\mathbf{n} > p+3$ हैं। मानें कि $\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_i}$ तथा $(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{X_i} - \bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n})(\mathbf{X_i} - \bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n})^\mathbf{T}$ हैं। निम्न में से कौन से सही हैं?

1. $(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}})^\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}}) \sim \frac{\mathbf{p(n^2-1)}}{\mathbf{n(n-p)}}\,\mathbf{F_{p,n-p}}$
2. $E(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n}^\mathbf{T}\,\mathbf{S}\,\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n}) = trace\left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}^2}{\mathbf{n}}\right) + \boldsymbol{\mu}^\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\mu}$
3. $E(\mathbf{S}^{-1}) = \frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}-p-2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$
4. $(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}})^\mathbf{T}\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{n} - \mathbf{X_{n+1}}) \sim \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{n}}\chi_p^2$

A1: 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

118 704118 4.75 0.00

Let $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, 3$, where x_i's are fixed covariates, α and β are unknown parameters and ε_i's are independently and identically distributed normal random variables with mean 0 and variance $\sigma^2 > 0$. Given the following observations,

x_i	1	2	3
y_i	2.1	3.9	6

which of the following statements are true?

1. Maximum likelihood estimate of α is 0.1.
2. Least square estimate of α is 0.1.
3. Best linear unbiased estimate of α is 0.1.
4. Maximum likelihood estimate of $\frac{\beta}{\alpha}$ is 19.5.

मानें कि $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3$, जहां x_i नियत सह-प्रसर हैं, α तथा β अज्ञात प्राचल हैं तथा ε_i माध्य 0 तथा प्रसरण $\sigma^2 > 0$ वाले स्वतंत्रत: तथा सर्वथासमत: बंटित प्रसामान्य यादृच्छित चर हैं। यदि पर्यवेक्षण निम्न हों,

x_i	1	2	3
y_i	2.1	3.9	6

तो निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. α का अधिकतम संभाविता आकलन 0.1 है।
2. α का न्यूनतम वर्ग आकलन 0.1 है।
3. α का सर्वश्रेष्ठ रैखिक अनभिनत आकलन 0.1 है।
4. $\frac{\beta}{\alpha}$ का अधिकतम संभाविता आकलन 19.5 है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

119 704119 4.75 0.00

A cumulative hazard function $H(t)$ of a non-negative continuous random variable satisfies which of the following conditions?

1. $\lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$.

2. $H(0) = 0$.

3. $H(1) = 1$.

4. $H(t)$ is a nondecreasing function of t.

ऋणेतर संतत यादृच्छिक चर का संचयी संकट फलन $H(t)$ निम्न में से कौन सी शर्तें पूरी करता है?

1. $\lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$.

2. $H(0) = 0$.

3. $H(1) = 1$.

4. $H(t)$ है t का फलन, जो ह्रासमान नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

120	704120	Suppose that cars arrive at a petrol pump following a Poisson distribution at the rate of 10 per hour. The time to perform the refilling is exponentially distributed and the single available staff takes an average of 4 minutes to refill each car. Further assume that the cars leave immediately after refilling. Let α denote the probability of finding 3 or more cars waiting to refill and let β denote the mean number of cars in the queue. Which of the following statements are correct? 1. $\alpha = \frac{8}{27}$ 2. $\beta = 1$ 3. $\beta - \alpha = \frac{46}{27}$ 4. $\alpha\beta = 3$	4.75	0.00

मानें कि किसी पेट्रोल पंप पर कारें प्वासों बंटन का अनुसरण करते हुए 10 प्रति घंटा की दर से आती हैं। (पेट्रोल) भरने में लगने वाला समय चर घातांकी रूप में बंटित है तथा उपलब्ध अकेला कर्मचारी हर कार को भरने में औसतन 4 मिनट लेता है। यह भी मानें कि भर जाने पर कारें तत्काल चली जाती हैं। मानें कि 3 या 3 से अधिक कारों के प्रतीक्षारत होने की प्रायिकता α तथा पंक्ति में लगी कारों की माध्य संख्या β है। निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\alpha = \frac{8}{27}$

2. $\beta = 1$

3. $\beta - \alpha = \frac{46}{27}$

4. $\alpha\beta = 3$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4